<u>פיתרון בחינה בחדוו"א א</u> פרופ' דניאל קרן

1) לכל אחת מהטענות הבאות, ציינו אם היא נכונה או לא. אם לא, ספקו דוגמא נגדית. אם כן, הוכיחו מדוע.

א) לכל $x > 0$ מתקיים אי-השיוויון $e^x > 1 + x^2$.

נכון. נגדיר $f(x) = e^x - 1 - x^2$. אז $f(0) = 0$, נשאר להוכיח $x > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$, וזה פשוט ע"י גזירה ומציאת ערך בנקודת קיצון $(x = \ln(2))$. טעות נפוצה: לטעון "ברור ש – $x > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$ " (למה?!?!)

ב) אם לכל n מתקיים $|a_{n+1} - a_n| \le \frac{1}{\sqrt{n}}$, אזי a_n מתכנסת.

לא נכון. דוגמא נגדית: $h_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$

ג) אם $f(x)$ גזירה בנקודה $x = 0$, אזי קיים $\varepsilon > 0$ כך ש - $f(x)$ רציפה בקטע $(-\varepsilon, \varepsilon)$.

לא נכון. דוגמא נגדית: $f(x) = \begin{cases} 0 & x \in Q \\ x^2 & x \notin Q \end{cases}$ שהיא גזירה ב – 0 אבל רציפה רק ב – 0 ולכן אין $\varepsilon > 0$ כזה.

2) חשבו 3 מתוך 4 הגבולות הבאים. אם גבול אינו קיים או אינו ניתן לחישוב מדוייק, הסבירו מדוע.

א) $\lim\limits_{x\to\infty} \lfloor x \rfloor \sin(1/x)$ כאשר $\lfloor x \rfloor$ הוא ערך שלם ("לעגל למטה").

גבול = 1 (מיידי מאחר ו – $x - 1 \le \lfloor x \rfloor \le x$ ומשפט הסנדוויץ').

ב) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(e^x \ln(1+e^x) - xe^x\right)$

גבול = 1. ($e^x \ln(1+e^x) - xe^x = e^x(\ln(1+e^x) - x) = \frac{\ln(1+e^x) - x}{e^{-x}}$, ממשיכים עם לופיטל ומפשטים את הביטוי).

ג) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{(1-\cos(x))^{\frac{3}{2}}}{x - \sin(x)}$

גבול = $\frac{3}{\sqrt{2}}$. לופיטל, מצמצמים ב – $\sqrt{1-\cos(x)}$ ומכניסים הכל לתוך השורש, ועוד לופיטל. *הגבול הקשה מתוך הארבעה.*

ד) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x - x^2/2 - x^3/6}{(1-\cos(x))^2}$

גבול = $\frac{1}{6}$. פיתרון רגיל עם לופיטל.

3) א) נסחו והוכיחו את קריטריון קושי להתכנסות סדרות (המשפט עם התנאי $\forall m,n > N \ \ |a_m - a_n| < \varepsilon$). מותר להסתמך על משפטים קודמים, אבל יש לציין אותם במדויק (מספיק הניסוח, לא חייבים את שם המשפט).

שאלת הוכחה. חלק מהפותרים נתנו הוכחה שונה מזו שלימדתי – אין בעיה.

ב) סידרה מוגדרת רקורסיבית כך: a_1 הוא מספר ממשי חיובי ממש, ו - $n > 1 \Rightarrow a_n = \sqrt{a_{n-1}^2 + 1}$. חשבו את $\lim_{n\to\infty} a_n$. אם הגבול אינו קיים או אינו ניתן לחישוב מדוייק, הסבירו מדוע.

הפיתרון טריוויאלי מתוך נוסחת הנסיגה:

$$a_2 = \sqrt{a_1^2 + 1}, a_3 = \sqrt{a_2^2 + 1} = \sqrt{a_1^2 + 2}, a_4 = \sqrt{a_3^2 + 1} = \sqrt{a_1^2 + 3}...$$

ולכן ברור שהסידרה שואפת לאינסוף.