אוניברסיטת חיפה, החוג למדעי המחשב

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי א' (חדו"א)

- דרישות הקורס: בחינה סופית, תרגילים.
- מרצה: פרופ' דניאל קרן, dkeren@cs.haifa.ac.il
- אתר הקורס: www.cs.haifa.ac.il/~dkeren/hedva
- וכמובן האתר במודל.

- סקירה על אנליזה ועל חשיבותה במדעי המחשב: אופטימיזציה, ראייה ממוחשבת, גרפיקה, עבוד אותות, דחיסה (jpg,avi,mp3), תקשורת, ולאחרונה גם תחומים שנחשבו ל- "בדידים", כגון למידה, סיווג טקסטים וכו'. מתברר שלעיתים, למרות שהבעיה המקורית הינה ב-"עולם הבדיד", ניתן להציג ולפתור אותה באופן טוב יותר ב-"עולם הרציף" – שבו עוסק החדו"א.
- שמושים אזוטריים יותר: פרקטלים, כאוס, תורת הקטסטרופות.

- אינדוקציה: הסבר, $\sum k^3$ $\sum k^2$ $\sum k$ מה ניתן להסיק מהתוצאות?
- פרדוקס: לכל בני-האדם אותו צבע עיניים?
- מושג הקבוצה. הגדרות: $\cap$ $\cup$ $\supseteq$ $\supset$ $\notin$ $\in$
- קבוצות מספרים: טבעיים N , שלמים Z, רציונליים Q, אלגבריים A, ממשיים R. נחשוב על מספר ממשי כפיתוח עשרוני. מה מאפיין (בייצוג זה) את הרציונליים?
- **משפט:** אם a,b ממשיים כך ש – $a>b$, אזי יש $q\in \mathrm{Q}$ ו - $r\notin \mathrm{Q}$ כך ש – $a>q>b$, $a>r>b$

  כלומר, הרציונליים והאי-רציונליים הם "צפופים".
- תכונות מוזרות של קבוצות אינסופיות: השלם שווה לחלקו?
- כמה מספרים ראשוניים יש?

- **משפט:** $\sqrt{2} \notin Q$ (כלומר, $\sqrt{2}$ אינו רציונלי). $\pi \notin Q$
- מה עם $\sqrt{2}+\sqrt{3}$? $\sqrt{3}\sqrt{12}$?
- חסמים מלעיל ומלרע. דוגמאות. קבוצות חסומות ולא חסומות. מקסימום ומינימום. פעולות על קבוצות (חיבור, כפל, חילוק של קבוצות) בהקשר של חסימות.
- תתי-קבוצות בסיסיות של הממשיים (קטע פתוח וכו').
- **סופרמום ואינפימום**. סופרמום הוא החסם מלעיל הקטן ביותר, אינפימום הוא החסם מלרע הגדול ביותר. דוגמאות (קטע פתוח). .Sup, Inf
- **משפט:** לקבוצה $\{x / x \in Q, x > 0, x^2 < 2\}$ אין סופרמום ב – Q.
- **משפט (עבורנו – אקסיומה):** לכל קבוצה חסומה מלעיל של מספרים ממשיים יש סופרמום, לכל קבוצה חסומה מלרע של מספרים ממשיים יש אינפימום.

- **דוגמאות:** מהם הסופרמום והאינפימום של $\{\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5}...\}$

$$\{x/x^3\le 27\}\quad \{x/x^2<4\}\quad \{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}...\}$$

$$\{\frac{n+1}{2n+4}\}_{n=1}^{\infty}\quad \{\sin(7^n)\}_{n=1}^{\infty}\quad \{\frac{-1^n}{n}\}_{n=1}^{\infty}$$

- **משפט:** אם S הוא הסופרמום של קבוצה K ו - $\varepsilon>0$ אזי קיים $x\in K$ כך ש- $x>S-\varepsilon$.

הוכחה: אם לא, אזי $S-\varepsilon$ היה חסם מלעיל של K, אך זו סתירה כי S הוא החסם מלעיל הקטן ביותר, וברור ש - $S>S-\varepsilon$

- סימנים נוספים:

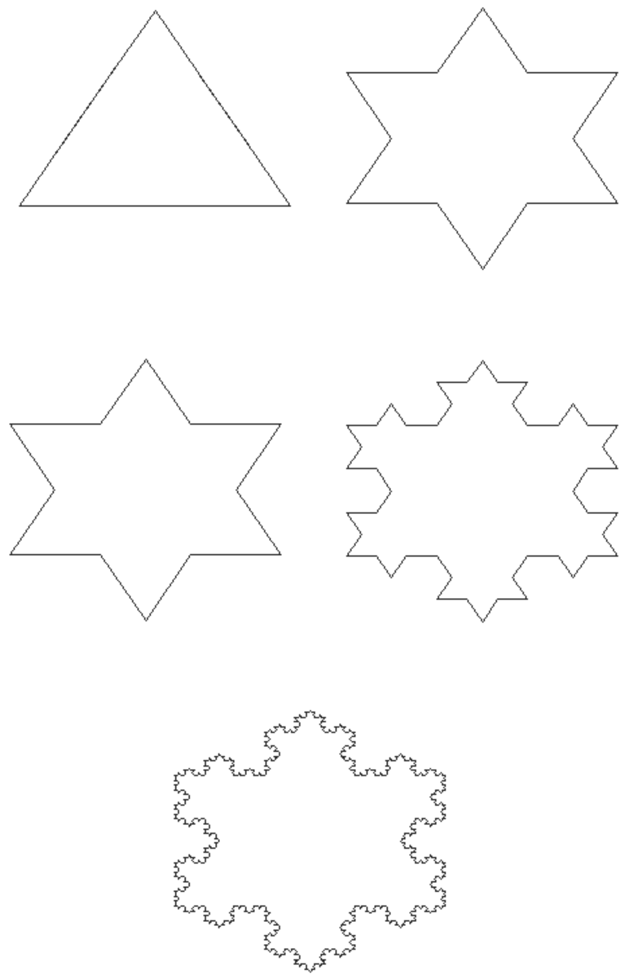
$\forall$ – לכל

$\exists$ – קיים

סדרות (Sequences)

- פורמלית, סידרה היא פונקציה $f : N \to R$
- נחשוב על סידרה כעל רשימה אינסופית מסודרת של מספרים ממשיים: $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n \ldots$
- סידרה יכולה להיות מיוצגת ע"י נוסחה (למשל $a_n = 1/n$), או חוק (למשל, a_n הוא המספר הראשוני ה – n).
- איבר בסידרה יכול לחזור על עצמו: למשל, ...2,2,2,2 היא סידרה. הסידרה ....1,2,1,2 שונה מהסידרה ....2,1,2,1 .
- סדרות חשובות: הסידרה ההרמונית, הרמונית מתחלפת, חשבונית, הנדסית.
- הגדרות: סדרה מונוטונית: $n^2/2^n$? $\sin(n)$? $\sqrt{n} + 1/n$? סידרה חסומה. סידרה רקורסיבית $a_1 = \sqrt{2} \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}$

סידרה של צורות:



פתית השלג של קוך

<u>גבול (Limit) של סידרה</u>

- L הוא **<u>גבול</u>** של הסידרה a_n אם אברי הסידרה "מתקרבים יותר ויותר" ל – L. הגדרה פורמלית:
- נאמר שהגבול של a_n הוא L אם, לכל $\varepsilon > 0$, קיים N טבעי כך שאם $n > \mathrm{N}$ אז $|a_n - L| < \varepsilon$.
- הגדרות: $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ היא סביבת -ε של L.

נאמר שתכונה מסוימת מתקיימת <u>כמעט לכל אברי הסידרה</u> אם קיים N כך שהיא מתקיימת לכל a_n כך ש - $n > \mathrm{N}$. או – התכונה מתקיימת לכול אברי הסידרה פרט למספר סופי.

נוכל לומר לכן שהגבול של a_n הוא L אם, לכל סביבת - ε של L, כמעט כל אברי הסידרה נמצאים בסביבה.

- אם כל אחת ממספר סופי של תכונות מתקיימת כמעט לכל אברי הסידרה, אזי גם כולן יחד מתקיימות כמעט לכל אברי הסידרה.
- **משפט:** אם גבול קיים, אזי הוא יחיד.
- **משפט:** סידרה מתכנסת היא חסומה.
- דוגמאות לגבול: סידרה קבועה, $1/n$, $(n+2)/(2n-3)$, $\sin(n)$
- **משפט:** גבול של סכום, מכפלת ומנת סדרות, גבול של שורש של סידרה.
- L <u>אינו</u> הגבול של a_n אם"ם יש $\varepsilon > 0$ כך שאינסוף איברים של a_n הם מחוץ לקטע $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$. או – לכל N, יש $n > N$ כך ש- $a_n \notin (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$. או – ככל שנתרחק לכיוון האינסוף, עדיין יהיו איברים שאינם שייכים ל- $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$.

- הגדרת שאיפה ל - ∞ , $-\infty$: $\forall_{M} \; \exists_{N} \;\; n > N \Rightarrow a_n > M$
  $\forall_{M} \; \exists_{N} \;\; n > N \Rightarrow a_n < M$
- סידרת הממוצעים: $u_n = \dfrac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$
- אם הגבול של a_n הוא L, נסמן $\lim(a_n) = L$, או $a_n \to L$.
- **משפט:** אם $a_n \to L$ ו - u_n סידרת הממוצעים, אזי $u_n \to L$

הוכחה: יהי $\varepsilon > 0$. יש n_1 כך ש - $n > n_1 \Rightarrow |L - a_n| < \varepsilon/2$, יש M כך שלכל n $|a_n| \le M$, יש n_2 כך ש - $n > n_2 \Rightarrow \dfrac{2Mn_1}{n} < \dfrac{\varepsilon}{2}$. אם $n > n_1, n_2$:

$$|u_n - L| = \left|\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} - L\right| = \left|\frac{(a_1 - L) + \ldots + (a_n - L)}{n}\right| \le$$

$$\frac{|a_1 - L| + \ldots + |a_{n_1} - L| + |a_{n_1+1} - L| + \ldots + |a_n - L|}{n} = \frac{|a_1 - L| + \ldots + |a_{n_1} - L|}{n} +$$

$$\frac{|a_{n_1+1} - L| + \ldots + |a_n - L|}{n} < \frac{2M + \ldots + 2M}{n} + \frac{\varepsilon/2 + \ldots + \varepsilon/2}{n} = \frac{2Mn_1}{n} + \frac{(n - n_1)\,\varepsilon/2}{n} \le \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

$\boxed{\text{(נשים לב שאם } M \ge |a_n| \;\forall_n \text{ אז } M \ge |L| \text{ ולכן } |a_i - L| \le |a_i| + |L| \le 2M\text{)}}$

- **משפט:** אם a_n חסומה ו- $b_n \to 0$ אז $a_n b_n \to 0$.
- **משפט:** אם $a_n \to L$ ו- $a_n, L > 0$ אז $\frac{n}{1/a_1 + \dots + 1/a_n} \to L$

הוכחה: $1/a_n \to 1/L$, לכן לפי המשפט על סידרת ממוצעים

$\frac{1}{n}(1/a_1 + \dots + 1/a_n) \to \frac{1}{L}$ ולכן המשפט נובע מיד ע"י לקיחת הפכי.

- **משפט (כלל הסנדוויץ'):** אם a_n b_n c_n סדרות כך ש- $a_n, c_n \to L$ וכך שהחל ממקום מסוים $a_n \le b_n \le c_n$, אז $b_n \to L$.
- **משפט:** אם $a_n \to L(>0)$ ו- $a_n > 0$, אז $\sqrt[n]{a_1 \dots a_n} \to L$. הוכחה ממשפט קודם, מכלל הסנדוויץ' ומאי-שוויון הממוצעים.
- **משפט:** אם $a_n > 0$ ו- $\frac{a_n}{a_{n-1}} \to L$, אז $\sqrt[n]{a_n} \to L$

הוכחה: נגדיר סידרה חדשה ע"י $b_n = a_n / a_{n-1}$ $b_1 = a_1, n > 1 \Rightarrow$. לפי משפט קודם

$\lim \sqrt[n]{b_1 \dots b_n} = \lim b_n = \lim a_n / a_{n-1}$ אבל $b_1 \dots b_n = a_n$ ולכן $\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim a_n / a_{n-1}$

האם נכון הכיוון ההפוך: אם $\sqrt[n]{a_n} \to L$ אז $\frac{a_n}{a_{n-1}} \to L$?

לא: נגדיר $a_n = 1,2,1,2\dots$.

- דוגמאות:

$$\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[n]{n}}{n} \to 1 \qquad \frac{2^n}{n!} \to 0 \qquad \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n!)^2}} \to 4 \qquad \sqrt[n]{n!} \to \infty \qquad \sqrt[n]{n} \to 1 \qquad \sqrt[n]{c} \to 1$$

- **משפט:** כל סידרה מונוטונית וחסומה מתכנסת (אם היא עולה – לסופרמום, אם יורדת – לאינפימום). סידרה מונוטונית ולא חסומה מתכנסת ל - ∞ או $-\infty$.
- דוגמא: $1/n + 1/(n+1) + \ldots + 1/2n$ היא חסומה ומונוטונית יורדת ולכן יש לה גבול (למרות שבשלב זה איננו יודעים למה הגבול שווה, אנו יכולים לקבוע שהסידרה מתכנסת).
- דוגמא: סידרה רקורסיבית: $a_{n+1}=\sqrt{a_n+2}$ $a_1=\sqrt{2}$. נוכיח (באינדוקציה) שהיא מונוטונית עולה וחסומה (ע"י 2) ולכן מתכנסת. במיקרה זה ניתן לחשב את הגבול ע"י הצבה בנוסחת הרקורסיה: אם הגבול הוא L, $a_n, a_{n+1} \to L \Rightarrow L=\sqrt{L+2} \Rightarrow L=2$
- דוגמא: $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}$ מונוטונית עולה ואינה חסומה, לכן שואפת ל - ∞.
- **משפט:** תהי a_n מונוטונית עולה ו- b_n מונוטונית יורדת כך שלכל n $b_n > a_n$. כמו כן ידוע ש - $b_n - a_n \to 0$. אזי ל - a_n ו - b_n יש אותו גבול.

הוכחה: ברור שהסדרות חסומות (למשל a_n חסומה ע"י b_1) ומונוטוניות ולכן מתכנסות.
נסמן את הגבול של a_n ב - c . אז

$$b_n - c = (a_n - c) + (b_n - a_n) \to 0+0=0$$

ולכן $b_n \to c$.

- **משפט (הלמה של קנטור):** תהי $\{[a_n,b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ סידרת קטעים סגורים כך שלכל n $[a_n,b_n]\supset[a_{n+1},b_{n+1}]$ וכמו כן $b_n-a_n\to 0$. אז יש נקודה אחת בדיוק בחיתוך של כל הקטעים.

הוכחה: קל לראות שהסדרות a_n,b_n מקיימות את תנאי המשפט הקודם. הגבול המשותף שלהן הוא $\lim(a_n)=\lim(b_n)=\sup(a_n)=\inf(b_n)=c$. ברור שלכל n $b_n\geq c\geq a_n$, לכן ברור ש - c נמצא בחיתוך כל הקטעים. מאחר ואורך הקטעים שואף ל – 0, ברור שאין נקודה נוספת בכולם.
(*הערה – המשפט אינו נכון לקטעים פתוחים; ראו למשל* $(0,1/n)$).

- המספר e מוגדר כגבול הסידרה $(1+1/n)^n$ (ניתן להוכיח שהיא מונוטונית עולה וחסומה). הוא אי-רציונלי וערכו המקורב 2.71828. שווה גם לגבול של $(1-1/n)^{(-n)}$.
ניתן גם לראותו כגבול של ריבית בזמני עדכון שואפים ל – 0.

- e מופיע פעמים רבות בחישוב גבולות מהצורה $(1+1/a_n)^{b_n}$, כאשר $a_n,b_n\to\pm\infty$ ("1^{∞}") .
הופכים את הגבול ל - $[(1+1/a_n)^{a_n}]^{(b_n/a_n)}$ ואז, אם $\frac{b_n}{a_n}\to\delta$ אזי הגבול המבוקש הוא e^{δ} .

לדוגמא:

$$\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n=\left(1+\frac{2}{n-1}\right)^n=\left[\left(1+\frac{2}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{2}}\right]^{\frac{2n}{n-1}}\to e^2$$

למשל, נחשב את הגבול של $a_n=\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}=\sqrt[n]{b_n}$ ע"י חישוב הגבול של $\frac{b_{n+1}}{b_n}$: $a_n\to\frac{1}{e}$

תתי-סדרות (sub-sequences)

- תהי a_n סידרה, ו - $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ סידרה מונוטונית עולה ממש של מספרים טבעיים. אזי $a_{n_1}, a_{n_2} \dots a_{n_k} \dots$ היא <u>תת-סידרה</u> של a_n. (*הערה – ברור ש* - $n_k \geq k$).
- **משפט:** אם סידרה מתכנסת, אז כל תת-סידרה שלה מתכנסת לאותו גבול. אם סידרה מתכנסת ל – ∞ או ל - $-\infty$, אז כל תת-סידרה שלה מתכנסת ל - ∞ או ל - $-\infty$.
- **משפט:** אם לסידרה יש שתי תתי-סדרות המתכנסות לגבולות שונים, הסידרה אינה מתכנסת.
- **משפט:** לכל סידרה מתכנסת יש תת-סידרה מונוטונית.

הוכחה: נניח $a_n \to \mathrm{L}$. יש שלוש אפשרויות: **א)** יש אינסוף איברים של הסידרה ששווים ל - L . אזי הם מגדירים תת-סידרה מונוטונית. **ב)** יש אינסוף איברים של הסידרה שגדולים מ – L . נבחר את הראשון, $a_{n_1} > \mathrm{L}$. נמשיך לבדוק את יתר אברי הסידרה הגדולים מ – L. מתישהו, חייבים להגיע לאיבר יותר קטן מ - a_{n_1} (אחרת, הסידרה לא תוכל להתכנס ל – L, כי יהיה לה "זנב" שכולו גדול או שווה מ - a_{n_1}, שהוא גדול ממש מ – L). נמשיך באופן אינדוקטיבי ונבנה תת-סידרה מונוטונית יורדת. **ג)** יש אינסוף איברים של הסידרה שקטנים מ – L : כמו ב).

- **הגדרה:** a יקרא <u>גבול חלקי</u> של סידרה אם יש תת-סידרה שלה שמתכנסת ל - a . למשל, לסידרה $(-1)^n + 1/n$ יש שני גבולות חלקיים, 1 ו - 1- .

- **משפט (Bolzano-Weierstrass):** לכל סדרה חסומה x_n יש תת-סידרה מתכנסת. או בניסוח שקול – לכל סידרה חסומה יש לפחות גבול חלקי אחד.

הוכחה: הסידרה x_n חסומה, לכן יש קטע המכיל אותה. נסמן אותו ב - $[a_1, b_1]$. נחצה את הקטע במרכזו. לפחות באחד החצאים יש אינסוף נקודות של הסידרה (אם בשניהם יש מספר סופי אז בכל הסידרה יש מספר סופי, סתירה). נסמן את החצי בו יש אינסוף נקודות ב - $[a_2, b_2]$. נחצה גם אותו, ונמשיך באופן זה לקבלת סידרה אינסופית של קטעים כך ש - :

א) $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \ldots \supset [a_k, b_k] \supset \ldots$

ב) לכל k, יש בקטע $[a_k, b_k]$ אינסוף נקודות של הסידרה.

ג) אורך הקטע $[a_k, b_k]$ הוא $b_k - a_k = \dfrac{b_1 - a_1}{2^{k-1}}$ (ולכן $b_k - a_k \to 0$).

כעת, נבנה תת-סידרה של x_n באופן הבא: נבחר n_1 כלשהו כך ש - $x_{n_1} \in [a_1, b_1]$. אח"כ נבחר n_2 כך ש - $n_2 > n_1$ ו - $x_{n_2} \in [a_2, b_2]$ (ניתן לבחור n_2 כזה מאחר ויש אינסוף איברים של הסידרה ב - $[a_2, b_2]$, ולכן חייבים להיות שם איברים עם אינדקס גדול מ - n_1.
שימו לב שחייבים לבחור $n_2 > n_1$, כי אינדקסים של תת-סידרה חייבים להיות מונוטוניים עולים ממש). נמשיך באופן זה ונבנה תת-סידרה x_{n_k} כך ש - $x_{n_k} \in [a_k, b_k]$. כעת, נשים לב שסידרת הקטעים $[a_k, b_k]$ מקיימת את הנחות הלמה של קנטור (מתנאים **א**, **ג** למעלה). לכן יש מספר ממשי c כך ש - $a_n, b_n \to c$. אבל $a_k \le x_{n_k} \le b_k$, ולכן לפי משפט הסנדוויץ' $x_{n_k} \to c$.

- **משפט Bolzano-Weierstrass** הוא בעל חשיבות רבה. שמוש טיפוסי שלו הוא בהוכחות בדרך השלילה: מניחים שתכונה "טובה" אינה מתקיימת, בונים סידרה של נקודות יותר ויותר "רעות", ומגיעים לתכונה "מאוד רעה" (ובלתי-אפשרית) של הגבול החלקי של סידרת הנקודות ה – "רעות" (שהמשפט מוכיח את קיומו).

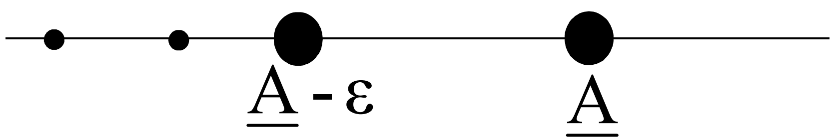
- **משפט:** סידרה חסומה a_n מתכנסת אם"ם יש לה בדיוק גבול חלקי אחד.

הוכחה: אם יש לה גבול, אז לפי משפט קודם כל תת-סידרה מתכנסת לגבול זה, ולכן יש רק גבול חלקי אחד. כיוון שני: נניח שיש רק גבול חלקי אחד L, ונוכיח ש - $a_n \to L$. נניח שלא. אזי, לפי הגדרת הגבול, קיים $\varepsilon > 0$ כך שיש אינסוף איברים של הסידרה מחוץ לקטע $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. לאותם אינסוף איברים יש לפי **Bolzano-Weierstrass** תת-סידרה מתכנסת (שהיא כמובן גם תת-סידרה של a_n). אבל מאחר וכל אברי תת-הסידרה הם מחוץ ל - $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$, ברור שהגבול שלה לא יכול להיות L, סתירה לכך ש – L הוא הגבול החלקי היחיד.

- **משפט:** לכל סידרה חסומה יש גבול חלקי קטן ביותר וגבול חלקי גדול ביותר . הגדול ביותר יקרא הגבול העליון ויסומן $\limsup a_n$ או $\overline{\lim}\, a_n$, הקטן ביותר יקרא הגבול התחתון ויסומן $\liminf a_n$ או $\underline{\lim}\, a_n$.

- **משפט:** יהיו $\underline{A}$, $\overline{A}$ הגבולות התחתון והעליון של a_n. אז, לכל $\varepsilon > 0$ יש לכל היותר מספר סופי של אברי הסידרה מחוץ לקטע $(\underline{A} - \varepsilon, \overline{A} + \varepsilon)$.

הוכחה: דומה להוכחה קודמת. אם יש אינסוף איברים מחוץ לקטע, נניח בלי הגבלת הכלליות שיש אינסוף איברים קטנים מ - $\underline{A} - \varepsilon$. לפי **Bolzano-Weierstrass** יש להם תת-סידרה מתכנסת, והגבול שלה חייב להיות קטן או שווה מ - $\underline{A} - \varepsilon$, לכן קטן ממש מ - $\underline{A}$, סתירה לכך ש - $\underline{A}$ הוא הגבול החלקי הקטן ביותר.



- **משפט:** יהיו $\underline{A}$, $\overline{A}$ הגבולות התחתון והעליון של סידרה חסומה a_n . אז a_n מתכנסת אם"ם $\underline{A} = \overline{A}$.

הוכחה: אם הסידרה מתכנסת, יש לה רק גבול חלקי אחד (ממשפט קודם), ולכן $\underline{A} = \overline{A}$. כיוון שני: אם $\underline{A} = \overline{A} = A$, אז ממשפט קודם, לכל $\varepsilon > 0$, כמעט כל אברי הסידרה נמצאים בקטע $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$, אך זו בעצם ההגדרה לכך שהסידרה מתכנסת ל – A.

- **משפט (קריטריון Cauchy להתכנסות סדרות):** תהי a_n סידרה חסומה. a_n מתכנסת אם"ם לכל $\varepsilon > 0$, קיים N כך שלכל $m, n \geq N$, $|a_m - a_n| < \varepsilon$. התנאי האחרון נקרא קריטריון Cauchy. כלומר, סידרה מתכנסת אם"ם אברי ה – "זנב" שלה מתקרבים זה לזה.

הוכחה: נניח $a_n \to L$ ויהי $\varepsilon > 0$. יש N כך ש –

$$(k \geq N \Rightarrow |a_k - L| < \varepsilon/2) \Rightarrow m,n \geq N \Rightarrow |a_n - a_m| \leq |a_n - L| + |L - a_m| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

כיוון שני: נניח ש - a_n אינה מתכנסת. לפי משפט קודם, יש לה שתי תתי-סדרות המתכנסות לגבולות שונים, נסמנם A ו – B. נניח $B - A = \delta > 0$. נסתכל בקטע $(A - \delta/4, A + \delta/4)$: חייבים להיות בו מספר אינסופי של אברים של מתת-הסידרה המתכנסת ל – A, נסמנם $a_{n_1}, a_{n_2} \ldots a_{n_k} \ldots$. מאותה סיבה חייבים להיות בקטע $(B - \delta/4, B + \delta/4)$ מספר אינסופי של אברים מתת-הסידרה המתכנסת ל – B, נסמנם $a_{m_1}, a_{m_2} \ldots a_{m_k} \ldots$. ברור שלכל n_l ו - m_r , $|a_{m_r} - a_{n_l}| > \delta/2$,

ולכן, מאחר ו - n_l , m_r לא חסומות, ברור שלא ניתן למלא את קריטריון Cauchy עבור $\varepsilon = \delta/2$.

- קריטריון Cauchy מאפשר לקבוע אם סדרות מסוימות מתכנסות או לא. למשל:

$$a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \qquad b_n = \sin(1) + \frac{\sin(2)}{2^2} + \frac{\sin(3)}{3^2} + \ldots + \frac{\sin(n)}{n^2}$$

למרות שלא תמיד ידוע (לנו) מה הגבול, ניתן לקבוע שהסדרות מתכנסות:

$$|a_m - a_n| = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{m^2} < \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{1}{(m-1)m} =$$

$$= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} < \frac{1}{n}$$

לכן קריטריון Cauchy מתמלא עבור a_n (עבור b_n ההוכחה דומה, תוך שמוש באי-שיוויון המשולש).

$c_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ מתבדרת:

$$|c_{2n} - c_n| = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

ולכן לא ניתן למלא את קריטריון Cauchy עבור $\varepsilon < 1/2$.

$d_n = \sin(1) + \frac{\sin(2)}{2} + \frac{\sin(3)}{3} + \ldots + \frac{\sin(n)}{n}$: מתכנסת, אך קשה יותר להוכיח זאת. יישום ישיר של קריטריון Cauchy (כמו ל- a_n, b_n) לא עובד.

דוגמאות לחישוב גבולות

- הגבולות הפשוטים ביותר הם מנות של פולינומים ב - n. קובעות רק החזקות הדומיננטיות במונה ובמכנה: נסמן

$$P(n)=a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1}+\ldots+a_0 \quad , \quad Q(n)=b_l n^l + b_{l-1}n^{l-1}+\ldots+b_0$$

ואז:

$$\lim\frac{P(n)}{Q(n)}=\begin{cases} 0 & (k<l) \\ \dfrac{a_k}{b_l} & (k=l) \\ \infty & \left(k>l,\dfrac{a_k}{b_l}>0\right) \\ -\infty & \left(k>l,\dfrac{a_k}{b_l}<0\right) \end{cases}$$

למשל:

$$\frac{n+80}{2n^2+0.4n-200}\to 0 \qquad \frac{-n^3+101n^2}{2n^3+0.4n-200}\to -\frac{1}{2}$$

$$\frac{0.0071n^6+80}{2n^2+0.4n-200}\to \infty \qquad \frac{-n^4+101n^2}{2000n^3+0.4n-200}\to -\infty$$

- ניתן להפעיל את הכללים של חזקות דומיננטיות גם בגבולות אחרים. למשל

$$\frac{n^2+\sqrt{9n^4+3n^3+1}}{3n^2}=\frac{1+\sqrt{9+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^4}}}{3}\to\frac{1+\sqrt{9+0+0}}{3}=\frac{4}{3}$$

חלוקת מונה ומכנה ב - n^2 (ש – "נכנס לשורש" כ - n^4)

עיקרון דומה:

$$\frac{7^n+5^n}{3\cdot 7^n-4^n}=\frac{1+\left(\frac{5}{7}\right)^n}{3-\left(\frac{4}{7}\right)^n}\to\frac{1+0}{3-0}=\frac{1}{3}$$

חלוקת מונה ומכנה ב - 7^n

- גבולות יותר מסובכים הם מהצורה $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$ או $\infty-\infty$. לעיתים ניתן לפתור אותם ע"י כפל ב – "צמוד" של סכום או הפרש שורשים:

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})=a-b$$

$$\sqrt{n}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-5})=\frac{\sqrt{n}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-5})(\sqrt{n+3}+\sqrt{n-5})}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n-5}}=$$

חלוקת מונה ומכנה ב - $\sqrt{n}$ (ש – "נכנס לשורש" כ - n)

$$=\frac{8\sqrt{n}}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n-5}}=\frac{8\sqrt{1}}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+\sqrt{1-\frac{5}{n}}}\to\frac{8}{1+1}=4$$

- ניתן להפעיל כפל בצמוד גם על גבולות מהצורה $0\cdot\infty$ או $\infty-\infty$ עם שורשים שלישיים:

$$\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}=\frac{a-b}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}$$

$$\sqrt[3]{n^3+2n^2}-\sqrt[3]{n^3+n^2}=\frac{(n^3+2n^2)-(n^3+n^2)}{\sqrt[3]{(n^3+2n^2)^2}+\sqrt[3]{(n^3+2n^2)(n^3+n^2)}+\sqrt[3]{(n^3+n^2)^2}}=$$

$$\frac{n^2}{\sqrt[3]{(n^3+2n^2)^2}+\sqrt[3]{(n^3+2n^2)(n^3+n^2)}+\sqrt[3]{(n^3+n^2)^2}}=$$

בשלב זה לא כדאי לפתוח את כל הסוגריים – יתקבל ביטוי מסובך. עדיף לחלק בחזקה הדומיננטית של המונה: n^2 ש – "נכנס לשורש שלישי" כ - n^6 , ואז לבדוק רק חזקות דומיננטיות.

$$=\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{(n^3+2n^2)^2}{n^6}}+\sqrt[3]{\frac{(n^3+2n^2)(n^3+n^2)}{n^6}}+\sqrt[3]{\frac{(n^3+n^2)^2}{n^6}}}\to\frac{1}{\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{1}}=\frac{1}{3}$$

באופן דומה:

$$n\left(\sqrt[3]{n^3+n^2+2n}-\sqrt[3]{n^3+n^2+n}\right)=$$

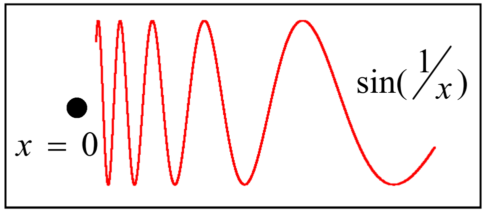
$$=\frac{n^2}{\sqrt[3]{(n^3+n^2+2n)^2}+\sqrt[3]{(n^3+n^2+2n)(n^3+n^2+n)}+\sqrt[3]{(n^3+n^2+n)^2}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{(n^3+n^2+2n)^2}{n^6}}+\sqrt[3]{\frac{(n^3+n^2+2n)(n^3+n^2+n)}{n^6}}+\sqrt[3]{\frac{(n^3+n^2+n)^2}{n^6}}}\to\frac{1}{3}$$

<u>גבול של פונקציות לפי Heine</u>

- נרצה להבין את ההתנהגות של פונקציה $f(x)$ כאשר x מתקרב ל - x_0 ($x \to x_0$).
- אם $x \to 2$ ו - $f(x) = x^2$, "ברור" ש - $f(x) \to 4$. אבל אם $f(x) = \sin(1/x)$ ו - $x \to 0$, המצב מורכב יותר. אם מייצגים התקרבות ל – 0 ע"י סדרות השואפות ל – 0, נראה ש - $\sin(1/x)$ מתנהגת באופן שונה לסדרות שונות: למשל,

$$x_n = \frac{1}{n\pi} \Rightarrow \sin(1/x_n) = 0,\ x_n = \frac{1}{(2n + 1/2)\pi} \Rightarrow \sin(1/x_n) = 1$$



לכן נקבל שהגבול הוא "גם 0 וגם 1". כדי למנוע כפל משמעות כזה נגדיר: תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בסביבה מסוימת של x_0 (יתכן ש - $f(x)$ לא מוגדרת ב - x_0). נאמר ש – L הוא הגבול של $f(x)$ כאשר $x \to x_0$ אם <u>לכל</u> סידרה $x_n \to x_0, x_n \neq x_0$ מתקיים $f(x_n) \to L$. נסמן $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ או $x \to x_0 \Rightarrow f(x) \to L$. זוהי הגדרת הגבול לפי Heine.

אין ל - $f(x)$ גבול כאשר $x \to x_0$ $\Leftarrow [x_n, y_n \to x_0, x_n, y_n \neq x_0, f(x_n) \to L_1, f(y_n) \to L_2, L_1 \neq L_2]$

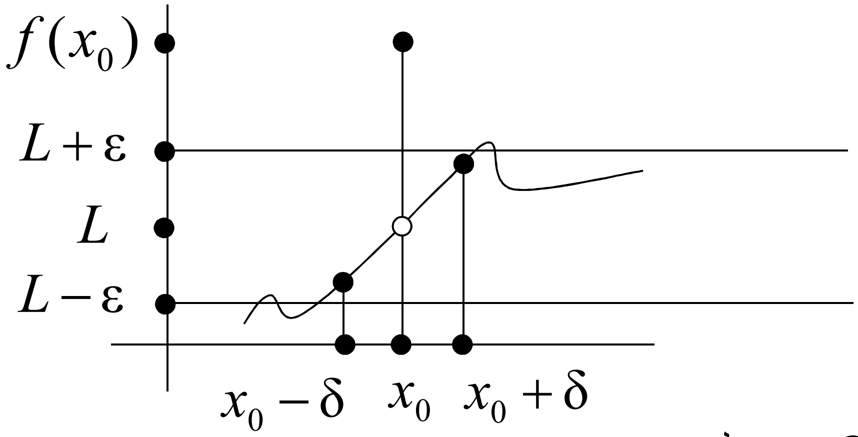
- משפטים על גבול של סכום, מכפלה וכו' נובעים מיידית מהמשפטים המתאימים לסדרות. כך גם משפט הסנדוויץ'. שאיפה לאינסוף (של x, $f(x)$ או שניהם) תוגדר כמו לגבי סדרות.
- גבול חשוב: $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

מדוגמא זו מובן מדוע לא דורשים ש – $f(x)$ תהיה מוגדרת ב - x_0. ניתן לפתור גבולות טריגונומטריים רבים ע"י רדוקציה לגבול זה.

גבול של פונקציות לפי Cauchy

- נגדיר: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L \iff \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0, 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$

כלומר: אם כופים על x להיות קרוב מספיק ל - x_0 (בלי להיות שווה ל - x_0), אזי ניתן לכפות על $f(x)$ להיות קרוב כרצוננו ל – L.



יתכן ש - $f(x)$ אינה מוגדרת ב – x_0
או שערכה ב - x_0 "קופץ" כמו באיור.

- **משפט:** הגדרות הגבול לפי Heine ו – Cauchy שקולות.

הוכחה: נראה תחילה כי $(\neg\text{Heine}) \Rightarrow (\neg\text{Cauchy})$. אם אין התכנסות לפי Cauchy, אזי קיים $\varepsilon_0>0$ כך שלכל $\delta>0$ קיים x כך ש - $0<|x-x_0|<\delta, |f(x)-L|\geq\varepsilon_0$.
נבחר (לכל n) $\delta_n=1/n$, ואז נקבל סידרה x_n כך ש – $0<|x_n-x_0|<1/n, |f(x_n)-L|\geq\varepsilon_0$.
ברור $x_n\to x_0, x_n\neq x_0, f(x_n)\not\to L$ ולכן אין התכנסות ל – L לפי Heine.

כיוון שני: נוכיח $\text{Heine}\Rightarrow\text{Cauchy}$. נניח $x_n\to x_0, x_n\neq x_0$ ויהי נתון $\varepsilon>0$. לפי Cauchy יש $\delta>0$ כך ש - $0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-L|<\varepsilon$. אבל אם $x_n\to x_0$, אזי קיים N כך ש - $n>\text{N}\Rightarrow|x_n-x_0|<\delta$, אבל אז ברור ש - $n>\text{N}\Rightarrow|f(x_n)-L|<\varepsilon$, ולכן יש התכנסות לפי Heine.

- שאיפה לאינסוף: כמו עבור סדרות.

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty \iff \forall M, \exists\delta>0, 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow f(x)>M$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=L \iff \forall\varepsilon>0, \exists M, x>M \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$$

- משפט: נניח $\lim_{x\to x_0} f(x)=L$. אז יש סביבה של x_0 שבה $f(x)$ חסומה.

- משפט: נניח $\lim_{x\to x_0} f(x)=L$, $L>0$. אז יש סביבה של x_0 (פרט אולי ל - x_0) שבה $f(x)>0$.

- דוגמאות לגבולות $\frac{0}{0}$: צמצום (ב - $(x-2$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4} \overset{?}{=} \frac{0}{0} = \lim_{x\to 2}\frac{x-1}{x+2}=\frac{1}{4}$$

- דוגמאות לגבולות 1^∞:
כמו עבור סדרות.

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty \Rightarrow \lim_{x\to x_0}\left(1+\frac{a}{f(x)}\right)^{f(x)}=e^a$$

- אי-שוויון מועיל לחשוב גבולות מסוימים: $0\le x<1 \Rightarrow 1+x\le e^x\le\frac{1}{1-x}$

אי-שוויון זה מאפשר להוכיח ש - $\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{x}=a$.

דוגמאות:

$$\lim_{x\to\infty} x(\sqrt[x]{2}-1) \overset{t=\frac{1}{x}}{\uparrow}= \lim_{t\to 0}\frac{2^t-1}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{e^{t\ln(2)}-1}{t} = \ln(2)$$

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}} = \lim_{x\to 2}\left(1+\frac{x-2}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}} = \lim_{x\to 2}\left[\left(1+\frac{x-2}{2}\right)^{\frac{2}{x-2}}\right]^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

- גבולות חד-צדדיים: אם $f(x)$ מוגדרת בקטע (a,x_0), נאמר ש – L הוא <u>הגבול השמאלי</u> של $f(x)$ ב $-x_0$ אם $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0, x_0-\delta<x<x_0 \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$.

נסמן: $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L$. גבול ימני מוגדר באותו אופן בדיוק. נסמן: $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$.

- **משפט:** גבול קיים אם"ם הגבולות השמאלי והימני קיימים ושווים.

- דוגמא: אם $f(x)=\frac{1}{x}$, הגבול השמאלי הוא $-\infty$ והגבול הימני הוא ∞.

- **משפט:** אם $f(x)$ מונוטונית בסביבת x_0, אזי קיימים $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ ו - $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$.

דוגמאות והשלמות: פונקציית Dirichlet , חישוב גבול לפי Cauchy

- נגדיר פונקציה ע"י

$$f(x)=\begin{cases}1 & x\in Q\\ 0 & x\notin Q\end{cases}$$

לכל x_0 ממשי, קיימת סידרה של רציונליים q_n, $q_n \to x_0$ וסידרה של אי-רציונליים r_n, $r_n \to x_0$. ברור ש – $f(q_n)\to 1$, $f(r_n)\to 0$,

ולכן, לכל x_0 , הגבול $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ אינו קיים.

- דוגמא לחישוב גבול ישירות מהגדרת Cauchy: נוכיח ש - $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$. צ"ל:

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0, 0<|x-2|<\delta \Rightarrow |x^2-4|<\varepsilon$. נבחר $\delta=\min(1,\frac{\varepsilon}{5})$:

$$|x-2|<\delta \Rightarrow |x-2|<1 \Rightarrow 1<x<3 \Rightarrow 3<x+2<5 \Rightarrow |x+2|<5$$

ו - $$|x-2|<\delta \Rightarrow |x-2|<\frac{\varepsilon}{5} \Rightarrow |x^2-4| = |x+2||x-2| < |x+2|\frac{\varepsilon}{5} < 5\cdot\frac{\varepsilon}{5} = \varepsilon$$

כלומר, רוצים ש - δ ימלא שתי דרישות, ולכן בוחרים את המינימום בין δ_1,δ_2 (שכל אחד מהם ממלא דרישה בודדת). כאן הדרישות הן $|x+2|<5$ ו - $|x-2|<\varepsilon/5$ (השתמשנו ברעיון דומה עבור סדרות).

רציפות (Continuity) של פונקציות

- אם פונקציה $f(x)$ מוגדרת בסביבה מסוימת של x_0 , נאמר ש - $f(x)$ רציפה ב – x_0
אם הגבול $\lim_{x\to x_0} f(x)$ קיים ושווה ל - $f(x_0)$. או – $\lim_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x)=f(x_0)$.

- משפטים על רציפות של סכום, מכפלה וכו' נובעים מיד מהמשפטים המתאימים לגבולות.

- אם פונקציה $f(x)$ מוגדרת בסביבה ימנית מסוימת של x_0 , נאמר ש - $f(x)$ רציפה מימין ב – x_0 אם הגבול $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=L$ קיים ושווה ל - $f(x_0)$. באותו אופן נגדיר רציפות משמאל.

- **משפט:** $f(x)$ רציפה ב - x_0 אם"ם היא רציפה ב - x_0 מימין ומשמאל.

נאמר ש - $f(x)$ רציפה בקטע אם היא רציפה בכל נקודה שלו. בנקודת קצה נדרוש רציפות מימין או משמאל (אם מדובר בקצה שמאלי או ימני בהתאמה).

- סוגים שונים של נקודות אי-רציפות:

אם $\lim_{x\to x_0} f(x)$ קיים ושונה מ - $f(x_0)$, או ש - $f(x)$ אינה מוגדרת ב - x_0 , נאמר ש – x_0 הינה <u>נקודת אי-רציפות סליקה</u> של $f(x)$. ניתן להפוך את $f(x)$ לרציפה ב - x_0 רק ע"י הגדרתה מחדש ב – x_0.

• דוגמא:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x)}{x} & x\neq 0\\ \text{undefined} & x=0\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}x^2 & x\neq 2\\ 5 & x=2\end{cases}$$

ניתן להפוך את $f(x)$ לרציפה ב – 0 ע"י הגדרתה שם כ – 1, ואת $g(x)$ לרציפה ב – 2 ע"י הגדרתה שם כ – 4.

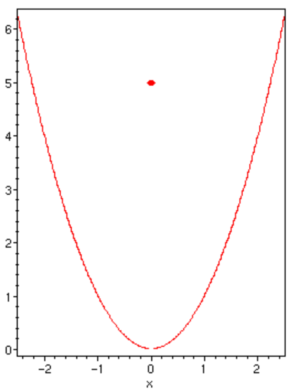
x_0 נקראת <u>נקודת אי-רציפות מסדר ראשון</u> של $f(x)$ אם היא מוגדרת בסביבה מסוימת של x_0 (פרט אולי ל - x_0 עצמה), והגבולות מימין ומשמאל ב - x_0 קיימים אך שונים. דוגמא:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x} & x\neq 0\\ \text{undefined} & x=0\end{cases}$$

זוהי אי-רציפות "גרועה" יותר מאי-רציפות סליקה, מאחר והפונקציה מבצעת "קפיצה" (סופית) בנקודה, ולא ניתן לתקן זאת ע"י שינוי ערך הפונקציה בנקודה. לפונקציה מונוטונית ומוגדרת בסביבה של הנקודה, זו אי-הרציפות האפשרית היחידה.

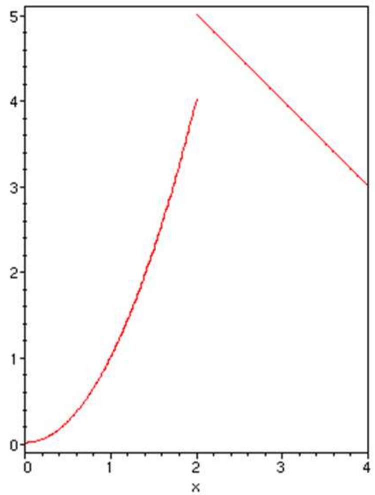
x_0 נקראת <u>נקודת אי-רציפות מסדר שני</u> של $f(x)$ אם היא מוגדרת בסביבה מסוימת של x_0 (פרט אולי ל - x_0 עצמה), ולפחות אחד מהגבולות מימין או משמאל ב - x_0 אינו קיים. דוגמא:

$$f(x)=\begin{cases}e^{\left(\frac{1}{x}\right)} & x\neq 0\\ \text{undefined} & x=0\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & x\neq 0\\ \text{undefined} & x=0\end{cases}$$



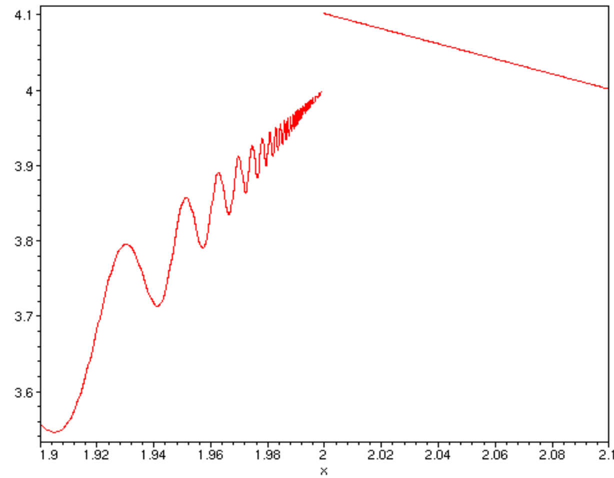
אי-רציפות סליקה

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & x\neq 0 \\ 5 & x=0 \end{cases}$$



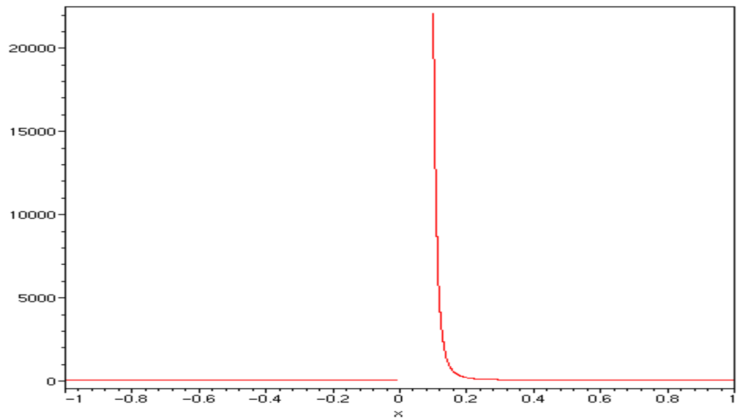
אי-רציפות מסדר ראשון

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & x<2 \\ 7 - x & x\geq 2 \end{cases}$$



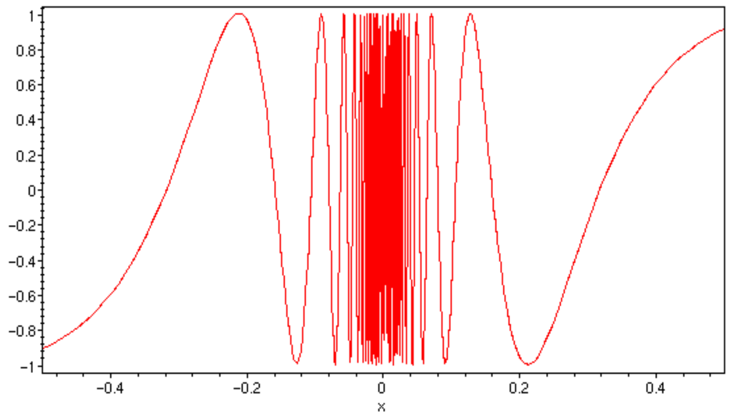
אי-רציפות מסדר ראשון (שימו לב: הגבול משמאל קיים).

$$f(x)=\begin{cases} x^2+(x-2)\sin\left(\dfrac{1}{x-2}\right) & x<2 \\ 6.1 - x & x\geq 2 \end{cases}$$



אי-רציפות מסדר שני (אין גבול מימין).

$$f(x)=\begin{cases} e^{\left(\frac{1}{x}\right)} & x\neq 0 \\ \text{undefined} & x=0 \end{cases}$$



אי-רציפות מסדר שני (אין גבול מאף כיוון).

$$f(x)=\begin{cases} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & x\neq 0 \\ \text{undefined} & x=0 \end{cases}$$

- **משפט:** תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע סגור $[a,b]$. אם $f(a)f(b)<0$ (כלומר, ל- $f(x)$ ערכים בעלי סימנים הפוכים בקצוות הקטע), אז יש נקודה c, $a<c<b$, כך ש- $f(c)=0$.

הוכחה: מזכירה מאוד את ההוכחה של Bolzano-Weierstrass. נקרא לקטע $[p,q]$ נורמלי אם $f(p)f(q)<0$ (לכן ברור ש- $[a,b]$ הוא נורמלי). נסמן את אמצע הקטע $[a,b]$ ב- m. אם $f(m)=0$ סיימנו, אם לא – ברור שאחד מהקטעים $[a,m],[m,b]$ הוא נורמלי, כי ל- $f(a),f(b)$ סימנים הפוכים, ולכן ל- $f(m)$ סימן הפוך ל- $f(a)$ או ל- $f(b)$.
אם נמשיך לחצות את הקטעים הנורמליים באופן זה, והפונקציה לא תתאפס באף נקודת אמצע, נקבל סידרה יורדת של קטעים נורמליים $[a_n,b_n]$, שאורכם שואף ל – 0. בדיוק כמו בהוכחה של Bolzano-Weierstrass, יש נקודה $c\in[a,b]$ כך ש- $a_n,b_n\to c$. מאחר ו- $f(x)$ רציפה, $f(a_n),f(b_n)\to f(c)$, ולכן $f(a_n)f(b_n)\to f^2(c)$. מאחר ולכל n, $[a_n,b_n]$ קטע נורמלי, אז $f(a_n)f(b_n)<0$, ולכן הגבול של $f(a_n)f(b_n)$ אינו יכול להיות >0. אבל גבול זה שווה ל- $f^2(c)$ שכמובן ≥ 0. לכן בהכרח $f^2(c)=0 \Leftarrow f(c)=0$.

- ניתן להסיק ממשפט זה על קיום של פתרון למשוואה $f(x)=0$ בתוך הקטע $[a,b]$. כמו כן, ההוכחה מציעה דרך מהירה לקרוב הפיתרון, ע"י חציות חוזרות של קטעים נורמליים (מזכיר מאוד חיפוש בינארי).

- יהי $p(x)$ פולינום ממעלה אי-זוגית. אז $\lim_{x\to-\infty}p(x)=-\infty, \lim_{x\to\infty}p(x)=\infty$ (או להיפך) ולכן ברור שיש נקודות בהן $p(x)>0$ ונקודות בהן $p(x)<0$, לכן יש נקודה בה הפולינום מתאפס; מסקנה – לכל פולינום ממעלה אי-זוגית יש שורש.

- **משפט:** אם $f(x)$ רציפה בקטע $[a,b]$ ו - $x\in[a,b]\Rightarrow f(x)\in[a,b]$, אז $\exists c, c\in[a,b], f(c)=c$. הוכחה: נובעת מיד מהפעלת המשפט הקודם לפונקציה $f(x)-x$.

- **משפט ערך הביניים של Cauchy:** אם $f(x)$ רציפה בקטע $[a,b]$, ו $F-$ הוא ערך מסוים בין $f(a)$ ו - $f(b)$, יש נקודה x_0 בקטע כך ש $F=f(x_0)$.

הוכחה: נניח למשל $f(a)<F<f(b)$. נגדיר $g(x)=f(x)-F$. אז $g(a)<0$ ו - $g(b)>0$, ולכן יש נקודה x_0 בקטע בה $g(x_0)=0$. אבל $g(x_0)=f(x_0)-F$ ולכן $f(x_0)=F$.

- **משפט:** אם $f(x)$ רציפה בקטע $[a,b]$ אזי היא חסומה בקטע.

הוכחה: בדרך השלילה. נניח למשל ש - $f(x)$ אינה חסומה מלעיל. אזי לכל n טבעי, יש $x_n\in[a,b], f(x_n)>n$. לפי משפט Bolzano-Weierstrass, יש ל - $\{x_n\}$ תת-סידרה מתכנסת, נסמן $x_{n_k}\to x_0$ $(x_0\in[a,b])$. מאחר ו - $f(x)$ רציפה, $f(x_{n_k})\to f(x_0)$.
אבל $f(x_{n_k})>n_k\geq k\Rightarrow f(x_{n_k})\to\infty$, סתירה (לא ייתכן גם $f(x_{n_k})\to\infty$ וגם $f(x_{n_k})\to f(x_0)$).

המשפט <u>אינו נכון לקטעים שאינם סגורים</u>. למשל, $f(x)=\frac{1}{x}$ רציפה ב - $(0,1]$ אך אינה חסומה בו.

- **משפט:** אם $f(x)$ רציפה בקטע $[a,b]$, אז יש נקודות $c_1, c_2 \in [a,b]$ כך ש -
$.f(c_1) = \sup_{x\in[a,b]} \{f(x)\}, f(c_2) = \inf_{x\in[a,b]} \{f(x)\}$
כלומר – המקסימום והמינימום של ערכי הפונקציה קיימים ומתקבלים.

הוכחה: נראה ש - c_1 קיימת. מאחר וממשפט קודם $f(x)$ חסומה בקטע, קיים $.M = \sup_{x\in[a,b]} \{f(x)\}$

ממשפט קודם, נובע שלכל n טבעי, קיימת נקודה x_n כך ש -

$$.M - \frac{1}{n} < f(x_n) \le M, x_n \in [a,b]$$

ממשפט Bolzano-Weierstrass יש ל- $\{x_n\}$ תת-סידרה מתכנסת, $.x_0 \in [a,b], x_{n_k} \to x_0$

לכל k מתקיים $.M - \frac{1}{n_k} < f(x_{n_k}) \le M$ ממשפט הסנדוויץ' (ומאחר ו - $n_k \to \infty$), ברור

ש - $.f(x_{n_k}) \to M$ אבל נתון ש - $f(x)$ רציפה ולכן $.f(x_0) = M \Leftarrow f(x_{n_k}) \to f(x_0)$

המשפט <u>אינו נכון לקטעים שאינם סגורים</u>. למשל, $f(x) = x^2$ רציפה ב - $(0,1)$ אך אינה מקבלת בו מקסימום ומינימום.

רציפות במידה שווה (Uniform Continuity)

- נגדיר מושג חזק יותר מרציפות: $f(x)$ תיקרא <u>רציפה במידה שווה</u> בתחום D אם:

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x_1,x_2\in D,|x_1-x_2|<\delta\Rightarrow|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$$

- כלומר, יש חסם <u>גלובלי</u> ב - D על קצב ההתקרבות של $f(x_1)$ ל - $f(x_2)$ כאשר $x_1\to x_2$.
- **משפט:** רציפות במידה שווה גוררת רציפות.
- **משפט:** אם $f(x)$ רציפה בקטע סגור אזי היא רציפה במידה שווה בקטע.

הוכחה: בדרך השלילה. נניח ש - $f(x)$ רציפה ב - $[a,b]$, אך לא רציפה בו במידה שווה. אז

$$\exists\varepsilon_0>0,\forall\delta>0,\exists x_1,x_2\in D,|x_1-x_2|<\delta,|f(x_1)-f(x_2)|\geq\varepsilon_0.$$

בפרט, לכל n טבעי: $\exists x_n,y_n\in[a,b],|x_n-y_n|<\frac{1}{n},|f(x_n)-f(y_n)|\geq\varepsilon_0$

ממשפט Bolzano-Weierstrass יש ל- $\{x_n\}$ תת-סידרה מתכנסת, $x_{n_k}\to x_0$, $x_0\in[a,b]$.

$$|y_{n_k}-x_0|\leq|x_{n_k}-x_0|+|y_{n_k}-x_{n_k}|\leq|x_{n_k}-x_0|+\frac{1}{n_k}\to 0+0=0\Rightarrow y_{n_k}\to x_0$$

מאחר ו - $f(x)$ רציפה, $f(x_{n_k}),f(y_{n_k})\to f(x_0)$. אבל אז $f(x_{n_k})-f(y_{n_k})\to 0$,

סתירה לכך ש - $|f(x_{n_k})-f(y_{n_k})|\geq\varepsilon_0$.

המשפט <u>אינו נכון לקטעים שאינם סגורים</u>. נוכיח למשל ש - $f(x)=\frac{1}{x}$ אינה רציפה במידה שווה בקטע $(0,1]$: נבחר $\varepsilon=1$, ויהי נתון $\delta>0$. נבחר n כך ש - $\frac{1}{n}<\delta$. אם

$$x_2=\frac{1}{2n},\ x_1=\frac{1}{n}$$ אז $$|x_1-x_2|=\frac{1}{2n}<\delta$$ אבל $$|f(x_1)-f(x_2)|=n>\varepsilon,$$

ולכן $f(x)$ אינה רציפה במידה שווה בקטע, למרות שהיא רציפה בו.

באופן דומה קל להראות ש - $f(x)=\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ אינה רציפה במידה שווה באותו קטע, למרות שהיא רציפה בו.

דוגמאות והשלמות: פונקציה שהינה רציפה רק באי-רציונליים

- ברור שפונקצית Dirichlet אינה רציפה באף נקודה. נגדיר פונקציה דומה שרציפה ב - x אם"ם $x \notin Q$. נגדיר אותה רק בקטע $[0,1]$ (קל להכליל את ההגדרה לכל הישר).

תחילה, נבנה סידרה של רציונליים כך שכל רציונלי בקטע מופיע בה פעם אחת בדיוק:

$$\frac{0}{1},\frac{1}{1},\cancel{\frac{0}{2}},\frac{1}{2},\cancel{\frac{2}{2}},\cancel{\frac{0}{3}},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\cancel{\frac{3}{3}},\cancel{\frac{0}{4}},\frac{1}{4},\cancel{\frac{2}{4}},\frac{3}{4},\cancel{\frac{4}{4}},\frac{1}{5}\ldots$$

$$q_1\ q_2\quad q_3\qquad q_4\ q_5\qquad q_6\quad q_7\quad q_8\ldots$$

רושמים תחילה את כל הרציונליים בקטע עם מכנה 1, אח"כ עם מכנה 2 וכו'; לא רושמים אחד שכבר הופיע.

כעת נגדיר פונקציה כך:

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\notin Q\\ \dfrac{1}{n} & x=q_n\end{cases}$$

היינו חייבים לפסול רציונליים שכבר הופיעו, אחרת היו מקרים בהם

$$x=q_n=q_m$$

ואז לא היה ניתן להגדיר את $f(x)$.

אם $x\in Q$, אז יש סידרה $r_n\notin Q\,,\, r_n\to x$, לכן $f(r_n)\to 0$ אבל $f(x)\neq 0$ ולכן ברור ש - $f(x)$ אינה רציפה ב- x. נניח $x\notin Q$, ותהי $r_n\to x$ סידרה כלשהי של ממשיים (רציונליים ואי-רציונליים). אם $r_n\notin Q$, אז $f(r_n)=0$, ולכן נותר רק לבדוק את התנהגות $f(r_n)$ עבור אותם n שעבורם $r_n\in Q$, נסמן אותם n_k. אבל ברור ש - $n_k\to\infty$, לכן

$$f(r_{n_k})=\frac{1}{n_k}\to 0$$

ולכן $f(r_n)\to 0$, כלומר $f(x)$ רציפה ב - x.