שאלות תרגול, חדו"א א: נגזרות ואינטגרלים

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{n^2}$

2. א. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)+\ldots+\sin\left(\frac{n\pi}{n}\right)\right]$

ב. $\lim\limits_{\boldsymbol{n}\to\infty}\frac{1^{6.2}+2^{6.2}+\ldots+\boldsymbol{n}^{6.2}}{\boldsymbol{n}^{7.2}}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}f'(x),\ f(x)=\begin{cases}0 & x=0\\ x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0\end{cases}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^{x+|\sin(x)|}}{e^{x^2}}\right)$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{5}{3}}\left[\left(x+\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}}\right]$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+\sin(x)}{x^2}$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}(xe^{1/x}-x)$

8. $\lim\limits_{x\to 0}[\cos(x)^{1/x^2}]$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}}{\sin^4(x)}$

10. נתונה פונקציה $f(x)$ בקטע סגור ונתון ש – $f''(x)>0$ בכל הקטע. הוכיחו שלמשוואה $f(x)=7x+14$ לכל היותר שני פתרונות בקטע.

11. נתון שפונקציה $f(x)$ מקיימת $|f(x)-f(y)|\le 5|\sin(x)-\sin(y)|^{1.2}$ $\forall x,y$. הוכיחו ש – $f(x)$ קבועה.

12. ג) נתון ש – $f'(2)=7$. חשבו את $\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(2+3h)-f(2-5h)}{h}\right)$

13. הוכיחו שאם $f''(x)>0$ לכל x אז $f(x+1)-f(x)>f(x)-f(x-1)$ לכל x.

14. הוכיחו שאם $f'=f$, אזי קיים קבוע c כך ש – $f=ce^x$.

15. הוכיחו שלכל $0<a<b$ מתקיים אי-השוויון הבא: $\arctan(b)>\arctan(a)+\frac{b-a}{1+b^2}$

16. פונקציה מוגדרת ע"י $f(x)=\begin{cases}0 & x\notin Q\\ x^2(x^2-1) & x\in Q\end{cases}$.

באיזה נקודות היא רציפה ובאיזה נקודות גזירה?

17.	תהי f פונקציה גזירה שלוש פעמים ב $\mathbb{R}$ המקיימת: $f(0)=0,\ f'(0)=f(1)=f'(1)=1$ הוכיחו שקיימת נקודה $c\in(0,1)$ בה מתקיים $f^{(3)}(c)=0$.

18. פתחו את $\sin(x^2)$ לטור טיילור.

19. הסבירו כיצד ניתן לחשב את $\sin(0.01)$ בדיוק של 8 ספרות בעזרת פיתוח טיילור.

20. נתון ש - $f(x)$ גזירה פעמיים בקטע $[0,1]$, וכמו כן נתון $f(0)=0, f'(0)=0, f(1)=1$. הוכיחו שיש נקודה c בקטע המקיימת $f''(c)\ge 2$.