<u>שאלות תרגול, חדו"א א: סדרות, גבולות, רציפות</u>

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n),\ a_n=\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{9}\cdots\frac{n^2-1}{n^2}\qquad n\geq 2$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n),\ a_n=\left(\frac{(2n)!}{(n!)^2}\right)^{\frac{1}{n}}$

3) האם קיים $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n),\ a_n=1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\cdots\pm\frac{1}{\sqrt{n}}$

3) מצאו את כל הגבולות החלקיים של הסידרה $a_n=n\cdot\left(\frac{1}{2^n}+\sqrt{\left|\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right|}\right)$.

4) סידרה מוגדרת ע"י (שימו לב – יש יותר "+" מ – "-"). האם הסידרה מתכנסת?

$$1,1+\frac{1}{2},1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3},1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4},1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5},1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6},$$
$$1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7},1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8},1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\frac{1}{9}\ldots$$

5) נתונה סידרה a_n וידוע ש – I) 2008 ו – 2009 הם גבולות חלקיים של a_n. II) לכל n מתקיים $|a_{n+1}-a_n|\leq 0.5$. הוכיחו של – a_n לפחות שלושה גבולות חלקיים.

6) נתון שלכל n $|a_{n+1}-a_n|\leq\frac{1}{n^3}$, האם היא בהכרח מתכנסת?

7) תנו דוגמא לסדרה מונוטונית עולה כך ש – $a_{n+1}-a_n\to 0$ ו – a_n אינה מתכנסת. תנו דוגמא לסדרה חסומה כך ש – $a_{n+1}-a_n\to 0$ ו – a_n אינה מתכנסת.

8) נתון שלסדרה חסומה a_n יש בדיוק שני גבולות חלקיים. מהו המספר המקסימלי של גבולות חלקיים שיכול להיות לסדרה $a_{n+1}-a_n$?

9) הוכיחו או הפריכו: אם הגבולות $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n),\lim\limits_{n\to\infty}(a_nb_n)$ קיימים, אזי $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)$ קיים.

10) נתון ש – $\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{x}\right)=2$. מגדירים סידרה ע"י $a_n=f(1)+f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)+\ldots+f\left(\frac{1}{n}\right)$. הוכיחו ש – $\lim_{n\to\infty}(a_n)=\infty$.

11) א) $\lim_{n\to\infty} a_n,\ a_n=\frac{1}{2\log(2)}+\frac{1}{3\log(3)}+\ldots+\frac{1}{n\log(n)}$

ב) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2+3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{4n^2+n}}\right)$$

12) האם יש סידרה שהגבולות החלקיים שלה הם <u>בדיוק</u> $\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\ldots\frac{1}{n}\ldots\right\}$? יש לפתור רק בעזרת הגדרת גבול חלקי.

13) א) פונקציה מוגדרת ע"י $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin(\sin^2(x))}{x} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$. האם $f(x)$ רציפה ב – 0? אם לא, מהו סוג האי-רציפות? (25 נקודות)

14) תהי $f(x)$ פונקציה רציפה ב- R. נתון שלכל $x\in R$ מתקיים $|f(x)-x^3|<x^2$. הוכיחו כי $f(x)$ מקבלת ב- R כל ערך ממשי.

15) א) הגדירו רציפות במידה שווה של פונקציה $f(x)$ בתחום R.

ב) הוכיחו או הפריכו: אם $f(x)$ ו – $g(x)$ רציפות במידה שווה ב – R, אזי $7f(x)-3g(x)$ רציפה במידה שווה ב – R.

ג) הוכיחו או הפריכו: אם $f(x)$ ו – $g(x)$ רציפות במידה שווה ב – R, אזי $f(x)g(x)$ רציפה במידה שווה ב – R.

ד)

16) הוכיחו ישירות לפי הגדרת קושי ש – $\lim_{x\to 1/2}\left(1/x^2\right)=4$.

17) חשבו: $\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+a}-\sqrt{x^2+b}\right)$