

- **חובה לפתור את שאלה 1, ואחת בלבד מתוך 2,3.**
- נסחו והוכיחו כל טענה. תשובות סתמיות לא יתקבלו.
- יש לנסות לכתוב באופן ברור ולשמור על רצף הגיוני בכתיבת הפתרונות – כלומר, שכל הסעיפים של שאלה כלשהי יופיעו ברצף.
- **מחקו באופן ברור ע"י X את כל חישובי הטיוטה. לא מספיק לרשום "טיוטה" בראש העמוד.**
- שימו לב להנחיות. **לא לכתוב בעיפרון ולא לכתוב בשוליים!!**

(1) לכל אחת מהטענות הבאות, ציינו אם היא נכונה או לא. אם לא, ספקו דוגמא נגדית. אם כן, הוכיחו מדוע.

- (א) קיימת פונקציה $f(x)$ שהיא גזירה פעמיים בכל הישר ומקיימת:
 $f'(5) = 0, f'(6) = 1$, ולכל x ממשי מתקיים $f''(x) \leq 0.2$.
- (ב) אם $f(x), g(x)$ גזירות ומונוטוניות עולות ממש בכל הישר, ומתקיים לכל x $f(x) \geq g(x) \geq 0$, אזי גם מתקיים לכל x $f'(x) \geq g'(x) \geq 0$.

(ג) יש סידרה a_n , כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$, $a_n \geq 0$, אבל הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right)$ אינו קיים.

(2) חשבו 3 מתוך 4 הגבולות הבאים. אם גבול אינו קיים או אינו ניתן לחישוב מדויק, ציינו זאת.

(א) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(2n)!}{(n!)^2} \right)^{\frac{1}{n}}$

(ב) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)^{2x}$

(ג) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln(1+x)}{x} \right)^{1/x}$

(ד) האם קיים מספר ממשי c כך שערכו של הגבול הבא הוא מספר סופי ושונה מ-0?

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 2 \cos(x) + \cos^2(x)}{x^c}$$

- (3) (א) הוכיחו שאם $f(x)$ רציפה בקטע סגור, אזי ערכי $f(x)$ חסומים בקטע.
- (ב) נתון ש- $f(x)$ רציפה בכל הישר, ומתקיים לכל x אי-השוויון $x^3 - x^2 \leq f(x) \leq x^3 + 2x^2$. הוכיחו ש- $f(x)$ היא על, כלומר, שלכל ממשי y_0 קיים ממשי x_0 המקיים $f(x_0) = y_0$.
- (ג) תנו דוגמא לפונקציה $f(x)$ שמוגדרת בכל הישר, וכמו כן: אם $x \neq 0$ אזי הפונקציה גזירה ב- x אינסוף פעמים, אבל בנקודה $x = 0$ הפונקציה גזירה שלוש פעמים אך לא ארבע פעמים.

בהצלחה!