

תרגילים בנושא גבולות ורציפות של פונקציות

1 תהא $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[a, b]$. יהיו $x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$ הוכיחו שקיימת נקודה $x_0 \in [a, b]$ כך ש-

$$f(x_0) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n}$$

2 תהא f פונקציה רציפה ב- $(0, \infty)$ המקיימת $f(x) = f(x^2)$ לכל $x \in (0, \infty)$. הוכיחו כי f קבועה.

3 מיינו את נקודות אי-הרציפות של הפונקציה $f(x) = [x^2] \sin(\pi x)$.

4 הראו שלמשוואות הבאות קיים פתרון:

א. $\sin(x) = x + 4$

ב. $e^x = 3x$

ג. $\tan(x) = x + 1$

5 תהא $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה ב- \mathbb{R} כך שמתקיים: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$. הוכיחו ש- f לא חח"ע.

6 חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a}$ עבור $a \in \mathbb{R}$ כלשהו.

ב. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x^2 + 8} - 4}{x - 2}$

ג. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$

ד. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x) - \sin(3x)}{x}$

ה. $\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \tan\left(\frac{x\pi}{2}\right)$

ו. $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \sqrt[n]{\sin\left(\frac{1}{1}\right) \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{1}{3}\right) \cdots \sin\left(\frac{1}{n}\right)}$

הערה: מותר להשתמש בעובדה ש- $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = 1$