תרגול 9

הגדרה – נגזרת

תהא $f(x)$ פונקציה המוגדרת בסביבה של הנקודה x_0.

נאמר כי $f(x)$ גזירה בנקודה x_0 אם קיים מספר L כך שמתקיים $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)=L$, ונסמן

$\frac{df}{dx}(x_0)=f'(x_0)=L$.

המספר L ייקרא הנגזרת של $f(x)$ בנקודה x_0.

<u>**באופן מפורט יותר:**</u>

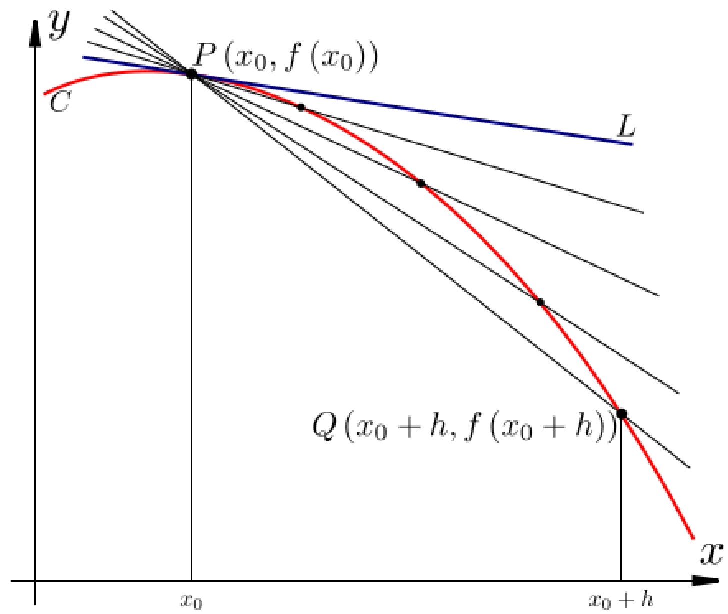
נאמר כי $f(x)$ גזירה בנקודה x_0 אם קיים מספר L כך שלכל $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$ $x_0 \neq x_n$ מתקיים

$\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}\xrightarrow[n\to\infty]{} L$.

<u>**הגדרה שקולה:**</u>

נאמר כי הנגזרת של $f(x)$ בנקודה x_0 היא L אם מתקיים $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\right)=L$. לעיתים מחליפים את Δx ב- h, באופן הבא: $\lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right)=L$.

<u>**משמעות גיאומטרית - תרשים:**</u>



נשים לב כי הביטוי $\frac{f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0\right)}{h}$ מבטא את שיפוע המיתר QP. ככול ש- x_0+h מתקרב ל- x_0 (כלומר, ככול ש- h מתקרב לאפס), כך שיפוע המיתר QP הולך ומתקרב ל- L.

משפט 1

אם $f\left(x\right)$ גזירה בנקודה x_0 אז $f\left(x\right)$ רציפה בנקודה x_0.

הוכחה

אנו רוצים להראות כי $\lim_{x\to x_0} f\left(x\right)=f\left(x_0\right)$.

נתון כי $f\left(x\right)$ גזירה בנקודה x_0. כלומר, קיים מספר L כך ש- $\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f\left(x\right)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}\right)=L$. מכאן נקבל כי:

$$f\left(x\right)-f\left(x_0\right)=\frac{f\left(x\right)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}\cdot\left(x-x_0\right)\xrightarrow[x\to x_0]{}L\cdot 0=0\Rightarrow \lim_{x\to x_0}\left(f\left(x\right)-f\left(x_0\right)\right)=0\Rightarrow \lim_{x\to x_0} f\left(x\right)=f\left(x_0\right)$$

משפט 2

יהיו $f\left(x\right)$ ו- $g\left(x\right)$ פונקציות גזירות בנקודה x. אזי:

1. לכל קבוע $c\in\mathbb{R}$ מתקיים $\left(cf\left(x\right)\right)'=cf'\left(x\right)$.
2. $\left(f\left(x\right)\pm g\left(x\right)\right)'=f'\left(x\right)\pm g'\left(x\right)$.

3. $\left(f(x)\cdot g(x)\right)' = f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$.

4. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$.

הוכחה

נוכיח רק את סעיף 3:

אם כן, עלינו להראות כי $\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{f(x+\Delta x)\cdot g(x+\Delta x)-f(x)\cdot g(x)}{\Delta x}\right)=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$.

אם כן:

$$\begin{aligned}
&\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{f(x+\Delta x)\cdot g(x+\Delta x)-f(x)\cdot g(x)}{\Delta x}\right)=\\
&=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{f(x+\Delta x)\cdot g(x+\Delta x)+g(x+\Delta x)f(x)-g(x+\Delta x)f(x)-f(x)\cdot g(x)}{\Delta x}\right)=\\
&=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\left(f(x+\Delta x)-f(x)\right)\cdot g(x+\Delta x)+f(x)\cdot\left(g(x+\Delta x)-g(x)\right)}{\Delta x}\right)=\\
&=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\left(f(x+\Delta x)-f(x)\right)}{\Delta x}\cdot g(x+\Delta x)+f(x)\cdot\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right)=\\
&=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\left(f(x+\Delta x)-f(x)\right)}{\Delta x}\right)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}g(x+\Delta x)+\lim_{\Delta x\to 0}f(x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right)=\\
&=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)
\end{aligned}$$

משפט 3 – כלל השרשרת

תהא $f(x)$ פונקציה גזירה ב- x_0, ותהא $g(x)$ פונקציה גזירה ב- $f(x_0)$. אז הפונקציה $g\circ f(x)=g\left(f(x)\right)$ גזירה ב- x_0, כך ש- $(g\circ f)'(x_0)=g'\left(f(x_0)\right)\cdot f'(x_0)$.

הוכחה

אנו רוצים להוכיח כי $g\left(f(x)\right)$ גזירה ב- x_0. כלומר, עלינו להראות כי לכל $x_0\neq x_n\xrightarrow[n\to\infty]{}x_0$ מתקיים כי

$$\frac{g\left(f(x_n)\right)-g\left(f(x_0)\right)}{x_n-x_0}\xrightarrow[n\to\infty]{}g'\left(f(x_0)\right)\cdot f'(x_0).$$

אם כן, תהא $x_0 \xrightarrow[n\to\infty]{} x_n \neq x_0$. מכך ש- $f(x)$ גזירה ב- x_0, נובע כי $f'(x_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} \underset{(1)}{\dfrac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}}$. כמו

כן, מכך ש- $f(x)$ גזירה ב- x_0, נובע גם כי $f(x)$ רציפה ב- x_0, ולכן $f(x_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x_n)$.

נפריד לשני מקרים:

1. **כאשר** $f'(x_0) \neq 0$:

במקרה זה נקבל כי קיים N, כך שלכל $n > N$, מתקיים כי $f(x_n) \neq f(x_0) \Rightarrow \underset{(2)}{f(x_n)-f(x_0) \neq 0}$.

כלומר, החל ממקום מסויים, כל איברי הסדרה $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ שונים מ- $f(x_0)$. כלומר, קיים מספר סופי של איברים השווים ל- $f(x_0)$. נשמיט אותם מ- $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$. כעת, נוכל לטעון כי $f(x_0) \xleftarrow[n\to\infty]{} f(x_n) \neq f(x_0)$, ולכן, נוכל להסיק כי מכך ש- $g(x)$ גזירה ב- $f(x_0)$, נובע כי $g'(f(x_0)) \xleftarrow[n\to\infty]{} \underset{(3)}{\dfrac{g(f(x_n))-g(f(x_0))}{f(x_n)-f(x_0)}}$. לכן, מ- $(1),(2),(3)$ נקבל כי:

$$\frac{g(f(x_n))-g(f(x_0))}{x_n-x_0} = \frac{g(f(x_n))-g(f(x_0))}{f(x_n)-f(x_0)} \cdot \frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0} \xrightarrow[n\to\infty]{} g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

כלומר, כלל השרשרת מתקיים.

2. **כאשר** $f'(x_0) = 0$:

במקרה זה נפצל את $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ לשתי תת-סדרות $\{f(x_n)_1\}_{n=1}^{\infty}$ ו- $\{f(x_n)_2\}_{n=1}^{\infty}$, כך שלכל n מתקיים כי $f(x_n)_1 \neq f(x_0)$ ו- $f(x_n)_2 = f(x_0)$.

אז מכך ש- $f(x_0) \xleftarrow[n\to\infty]{} f(x_n)$ נובע כי $f(x_0) \xleftarrow[n\to\infty]{} f(x_n)_1 \neq f(x_0)$ ולכן נקבל כי $g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) \xleftarrow[n\to\infty]{} \dfrac{g(f(x_n))-g(f(x_0))}{x_n-x_0}$ בדומה לסעיף הקודם.

כמו כן, עבור $\{f(x_n)_2\}_{n=1}^{\infty}$ נקבל כי

$$\frac{g(f(x_n)_2)-g(f(x_0))}{x_n-x_0} = \frac{g(f(x_0))-g(f(x_0))}{x_n-x_0} = 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

אם כן, הוכחנו כי $g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) \xleftarrow[n\to\infty]{} \dfrac{g(f(x_n))-g(f(x_0))}{x_n-x_0}$ עבור שתי תת-הסדרות, ולכן גם במקרה זה כלל השרשרת מתקיים.

נגזרות חד-צדדיות

נגזרת מימין

תהא $f\left(x\right)$ פונקציה המוגדרת בסביבה ימנית של x_0.

אם קיים מספר L כך שמתקיים $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\left(\frac{f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)}{\Delta x}\right)=L$, אז נאמר כי $f\left(x\right)$ גזירה מימין ב- x_0,

ונסמן $f'_+\left(x_0\right)=L$.

נגזרת משמאל

תהא $f\left(x\right)$ פונקציה המוגדרת בסביבה שמאלית של x_0.

אם קיים מספר L כך שמתקיים $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\left(\frac{f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)}{\Delta x}\right)=L$, אז נאמר כי $f\left(x\right)$ גזירה משמאל ב- x_0,

ונסמן $f'_-\left(x_0\right)=L$.

משפט 4

תהא $f\left(x\right)$ פונקציה המוגדרת בסביבה של x_0.

$f\left(x\right)$ גזירה ב- x_0 אם ורק אם $f\left(x\right)$ גזירה מימין ב- x_0 וגם $f\left(x\right)$ גזירה משמאל ב- x_0.

נגזרות של פונקציות שכיחות

$[x^a]' = a \cdot x^{a-1}$, $x \in \mathbb{R}$ for $a \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ for $a \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}^+$ for $a \in \mathbb{R}$.

$[e^x]' = e^x$, $x \in \mathbb{R}$;

$[a^x]' = \ln(a)a^x$, $x \in \mathbb{R}$.

$[\ln(x)]' = \frac{1}{x}$, $x > 0$;

$[\log_a(x)]' = \frac{1}{\ln(a)}\frac{1}{x}$, $x > 0$.

$[\sin(x)]' = \cos(x)$, $x \in \mathbb{R}$;

$[\cos(x)]' = -\sin(x)$, $x \in \mathbb{R}$;

$[\tan(x)]' = \frac{1}{\cos^2(x)}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$;

$[\cot(x)]' = \frac{-1}{\sin^2(x)}$, $x \neq k\pi$.

$[\arcsin(x)]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1, 1)$;

$[\arccos(x)]' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1, 1)$;

$[\arctan(x)]' = \frac{1}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$;

$[\text{arccot}(x)]' = \frac{-1}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

$[\sinh(x)]' = \cosh(x)$, $x \in \mathbb{R}$;

$[\cosh(x)]' = \sinh(x)$, $x \in \mathbb{R}$;

$[\tanh(x)]' = \frac{1}{\cosh^2(x)}$, $x \in \mathbb{R}$;

$[\coth(x)]' = \frac{-1}{\sinh^2(x)}$, $x \neq 0$.

$[\text{argsinh}(x)]' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $x \in \mathbb{R}$;

$[\text{argcosh}(x)]' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, $x \in (1, \infty)$;

$[\text{argtanh}(x)]' = \frac{1}{1-x^2}$, $x \in (-1, 1)$;

$[\text{argcoth}(x)]' = \frac{1}{1-x^2}$, $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

תרגיל 1

נתונה פונקציה $f(x)=\sqrt{x+1}$, חשבו לפי הגדרה את $f'(x)$ בנקודה $x=x_0$.

פתרון

אם כן, עלינו לחשב את $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x_0+1}}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x_0+1}}{x-x_0}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x_0+1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x_0+1}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{x+1-(x_0+1)}{(x-x_0)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x_0+1}\right)}\right)=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{x+1-x_0-1}{(x-x_0)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x_0+1}\right)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{x-x_0}{(x-x_0)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x_0+1}\right)}\right)=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x_0+1}}\right)=\frac{1}{2\sqrt{x_0+1}}$$

משפט 5

יהיו $f\left(x\right)$ ו- $g\left(x\right)$ פונקציות.

אם $f\left(x\right)$ רציפה בנקודה a ואם ידוע כי $\lim\limits_{x\to x_0} g\left(x\right)=a$ אז $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(g\left(x\right)\right)=f\left(\lim\limits_{x\to x_0} g\left(x\right)\right)=f\left(a\right)$.

הוכחה

תהא $x_0 \neq x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$.

אז מכך ש- $\lim\limits_{x\to x_0} g\left(x\right)=a$ נובע כי $g\left(x_n\right)\xrightarrow[n\to\infty]{} a$.

מכך שהפונקציה $f\left(x\right)$ רציפה בנקודה a נובע כי $f\left(g\left(x_n\right)\right)\xrightarrow[n\to\infty]{} f\left(a\right)$, ולכן לפי הגדרה מתקיים $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(g\left(x\right)\right)=f\left(a\right)=f\left(\lim\limits_{x\to x_0} g\left(x\right)\right)$.

תרגיל 2

נתונה פונקציה $f(x)=\ln(x)$, חשבו לפי הגדרה את $f'(x)$ בנקודה $x=x_0$.

פתרון

אם כן, עלינו לחשב את $\lim_{h\to0}\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right)$:

$$\lim_{h\to0}\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right)=\lim_{h\to0}\left(\frac{\ln(x_0+h)-\ln(x_0)}{h}\right)=\lim_{h\to0}\left(\frac{\ln\left(\frac{x_0+h}{x_0}\right)}{h}\right)=\lim_{h\to0}\left[\ln\left(\left(\frac{x_0+h}{x_0}\right)^{\frac{1}{h}}\right)\right]=$$

$$=\lim_{h\to0}\left[\ln\left(\left(1+\frac{h}{x_0}\right)^{\frac{1}{h}}\right)\right]=\lim_{h\to0}\left[\ln\left(\left(1+\frac{1}{x_0/h}\right)^{\frac{1}{h}}\right)\right]=\lim_{h\to0}\left[\ln\left(\left(\left(1+\frac{1}{x_0/h}\right)^{\frac{x_0}{h}}\right)^{\frac{1}{x_0}}\right)\right]=$$

$$=\lim_{h\to0}\left[\frac{1}{x_0}\ln\left(\left(1+\frac{1}{x_0/h}\right)^{\frac{x_0}{h}}\right)\right]=\lim_{h\to0}\left(\frac{1}{x_0}\right)\cdot\lim_{h\to0}\ln\left(\left(1+\frac{1}{x_0/h}\right)^{\frac{x_0}{h}}\right)=$$

$$=\lim_{h\to0}\left(\frac{1}{x_0}\right)\cdot\ln\left(\lim_{h\to0}\left(\left(1+\frac{1}{x_0/h}\right)^{\frac{x_0}{h}}\right)\right)=\lim_{h\to0}\left(\frac{1}{x_0}\right)\cdot\ln(e)=\frac{1}{x_0}$$

תרגיל 3

גזרו את הפונקציה הבאה תוך שימוש בכללי גזירה:

$$f(x)=x\cdot\arctan\left(x^2\right)$$

פתרון

$$\frac{f(x)}{dx}=\frac{x\cdot\arctan\left(x^2\right)}{dx}=\frac{x}{dx}\cdot\arctan\left(x^2\right)+x\cdot\frac{\arctan\left(x^2\right)}{dx}=\arctan\left(x^2\right)+x\cdot 2x\cdot\frac{1}{\left(x^2\right)^2+1}=$$

$$=\arctan\left(x^2\right)+2x^2\cdot\frac{1}{\left(x^2\right)^2+1}=\arctan\left(x^2\right)+\frac{2x^2}{x^4+1}$$

תרגיל 4

גזרו את הפונקציה הבאה תוך שימוש בכללי גזירה:

$$f(x)=x^{\sin x}$$

פתרון

גם הבסיס וגם המעריך תלויים ב- x, לכן נצטרך לכתוב את $f(x)$ באופן הבא:

$$f(x)=x^{\sin x}=e^{\ln\left(x^{\sin x}\right)}=e^{\sin(x)\cdot\ln(x)}$$

כעת נחשב את $f'(x)$:

$$f'(x)=\left(e^{\sin(x)\cdot\ln(x)}\right)'\underset{\text{Chain rule}}{=}e^{\sin(x)\cdot\ln(x)}\cdot\left(\sin(x)\cdot\ln(x)\right)'\underset{\substack{\text{Derivative of}\\ \text{product}}}{=}e^{\sin(x)\cdot\ln(x)}\cdot\left(\cos(x)\cdot\ln(x)+\sin(x)\cdot\frac{1}{x}\right)=$$

$$\underset{\substack{\text{we plug back the identity}\\ x^{\sin x}=e^{\sin(x)\cdot\ln(x)}}}{=}x^{\sin x}\cdot\left(\cos(x)\cdot\ln(x)+\sin(x)\cdot\frac{1}{x}\right)$$

תרגיל 5

הוכח/הפרך:

יהיו $f(x)$ ו- $g(x)$ פונקציות.

אם מתקיים:

1. $f(x)$ ו- $g(x)$ גזירות בנקודה a
2. $f(a)=g(a)=0$
3. $g'(a)\neq 0$

אז $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$.

פתרון

הטענה נכונה.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}\cdot\frac{x-a}{x-a}\right)=\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot\frac{x-a}{g(x)-g(a)}\right)=\ldots$$

כעת, מכך ש- $g(x)$ גזירה בנקודה a, נובע כי $g'(a)=\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{x-a}{g(x)-g(a)}\right)$. כמו כן, נתון כי $g'(a)\neq 0$. לכן, לפי אריתמטיקה של גבולות נקבל כי:

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{x-a}{g(x)-g(a)}\right)=g'(a)\Rightarrow\lim_{x\to a}\left(\frac{1}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}\right)=\frac{1}{g'(a)}\Rightarrow\lim_{x\to a}\left(\frac{x-a}{g(x)-g(a)}\right)=\frac{1}{g'(a)}$$

כלומר:

$$\ldots=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot\frac{x-a}{g(x)-g(a)}\right)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot\lim_{x\to a}\frac{x-a}{g(x)-g(a)}=$$

$$=f'(a)\cdot\frac{1}{g'(a)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$$

תרגיל 6

הוכח/הפרך:

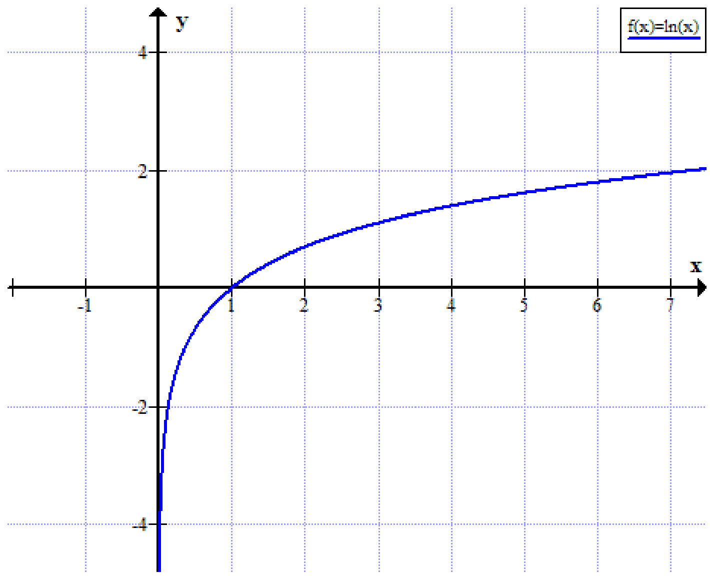
תהא $f\left(x\right)$ פונקציה.

אם $\lim_{x\to\infty} f'\left(x\right)=0$, אז קיים מספר L כך ש- $\lim_{x\to\infty} f\left(x\right)=L$.

פתרון

הטענה לא נכונה.

דוגמה נגדית - $f\left(x\right)=\ln x$. אז מתקיים כי $f'\left(x\right)=\frac{1}{x}$, וכמובן כי $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$, אך $\lim_{x\to\infty}\ln x=\infty$.



תרגיל 7

הוכח/הפרך:

תהא $f(x)$ פונקציה.

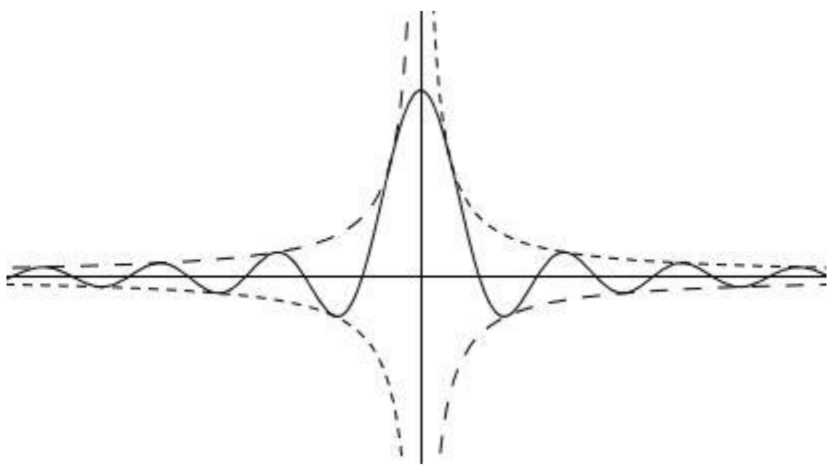
אם קיים מספר L כך ש- $\lim_{x\to\infty} f(x)=L$, אז $\lim_{x\to\infty} f'(x)=0$.

פתרון

הטענה אינה נכונה.

__**דוגמה נגדית – ניסיון ראשון:**__

$f(x)=\frac{\sin x}{x}$.



אז לכל $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$, החל ממקום מסויים בסדרה, מתקיים כי $-\frac{1}{x_n} \le f(x_n)=\frac{\sin x_n}{x_n} \le \frac{1}{x_n}$, ולכן לפי משפט הסנדוויץ׳, נקבל כי $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$.

אך נשים לב כי:

$$f'(x)=\left(\frac{\sin x}{x}\right)'=\frac{(\cos x)\cdot x-(\sin x)\cdot 1}{x^2}=\frac{\cos x}{x}-\frac{\sin x}{x^2}\xrightarrow[x\to\infty]{}0 .$$

ולכן דוגמה נגדית זו נכשלה, למרות שעל פניו היה נראה כי היא אכן מתאימה.

__**דוגמה נגדית – ניסיון שני:**__

$$f(x)=\frac{\sin x^2}{x}$$

אז ברור כי $0 \xrightarrow[x\to\infty]{} f(x)=\frac{\sin x^2}{x}$, אך נשים לב כי :

$$f'(x)=\left(\frac{\sin x^2}{x}\right)'=\frac{2x\cdot(\cos x)\cdot x-\left(\sin x^2\right)\cdot 1}{x^2}=\cos x-\frac{\sin x}{x^2}.$$

לפונקציה $f'(x)=\cos x-\frac{\sin x}{x^2}$ אין גבול כאשר $x\to\infty$. ניתן להראות זאת ע"י הוכחה בשלילה.

נניח בשלילה כי $f'(x)=\cos x-\frac{\sin x}{x^2}\xrightarrow[x\to\infty]{}0$, כלומר $\lim_{x\to\infty}\left(\cos x-\frac{\sin x}{x^2}\right)=0$. אז מתקיים כי :

$\lim_{x\to\infty}\cos x=\lim_{x\to\infty}\cos x-\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(\cos x-\frac{\sin x}{x^2}\right)=0$. כלומר קיבלנו כי $\lim_{x\to\infty}\cos x=0$, וזו סתירה, משום שאנו יודעים כי הגבול $\lim_{x\to\infty}\cos x$ לא קיים.

למעשה, ההבדל בין הדוגמה הראשונה לשנייה, כלומר בין $f(x)=\frac{\sin x^2}{x}$ ל- $f(x)=\frac{\sin x}{x}$, הוא בכך שבדוגמה השנייה השימוש ב- x^2 כקלט ל- $\sin$ מגביר את התנודתיות של הפונקציה, וכך מתקבל כי שיפוע גרף הפונקציה ממשיך להתנודד בפרעות גם כאשר משרעת הפונקציה דועכת ככול שערכי x הולכים וגדלים.

תרגיל 8

הוכח/הפרך:

תהא $f(x)$ פונקציה.

אם נתון כי $f'(x)=1$ לכל $x\neq 0$, אז $f(x)$ גזירה בנקודה $x=0$ ומתקיים $f'(0)=1$.

פתרון

הטענה אינה נכונה.

גזירות בסביבה של נקודה אינה מעידה על גזירות בנקודה עצמה.

דוגמה נגדית:

$$f(x)=\begin{cases} x & x\neq 0 \\ 6 & x=0 \end{cases}$$

אכן לכל $x\neq 0$ מתקיים כי $f'(x)=(x)'=1$, אך בנקודה $x=0$ נקבל כי

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x-5}{x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(1-\frac{5}{x}\right)=-\infty$$

ולכן $f(x)$ לא גזירה ב- $x=0$.

<u>מסקנה:</u>

באופן כללי, אם $\lim_{x\to a} f'(x)=L$ אז לא ניתן להסיק כי $f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=L$. החלק **הראשון** מתאר את הנגזרת **<u>בסביבה של</u>** a ואילו החלק **השני** מתאר את הנגזרת **<u>בנקודה</u>** a.