תרגול 8

הגדרה – גבול חד-צדדי (לפי היינה)

תהא $f(x)$ פונקציה.

נאמר כי L הוא גבול ימני של f ב- a, אם לכל סדרה $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ כך ש- $x_n > a$ לכל n, מתקיים כי $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} L$, ונסמן זאת ע״י $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$.

ניתן להגדיר גבול שמאלי באופן אנאלוגי.

משפט 1 (ללא הוכחה)

תהא $f(x)$ פונקציה.

אזי $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ אם ורק אם $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L$.

הגדרה – רציפות בנקודה

תהא $f(x)$ פונקציה המוגדרת בסביבה של a.

נאמר כי f רציפה בנקודה a אם לכל סדרה $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ מתקיים כי $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(a)$.

משפט 2 (ללא הוכחה)

פונקציה אלמנטרית רציפה בכל נקודה בה היא מוגדרת.

תזכורת – רשימת הפונקציות האלמנטריות:

- הפונקציה המעריכית.
- הפונקציה הלוגריתמית.
- פונקציות טריגונומטריות.
- פונקציות טריגונומטריות הפוכות.
- הוצאת שורש מכל סדר.
- כל צירוף של פונקציות אלמטריות ע״י פעולות אריתמטיות בסיסיות והרכבה.

משפט 3

יהיו f, g פונקציות.

אם $g(x)$ רציפה ב- a ו- $f(x)$ רציפה ב- $g(a)$ אז $f \circ g = f(g(x))$ רציפה ב- a.

הוכחה

נתון כי g רציפה ב- a. לכן, לכל $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ מתקיים כי $g(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} g(a)$. כמו כן, נתון כי f רציפה ב- $g(a)$, לכן, $f(g(x_n)) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(g(a))$. כלומר, קיבלנו לפי הגדרה, כי $f\circ g$ רציפה ב- a.

הגדרה – רציפות חד-צדדית

תהא $f(x)$ פונקציה המוגדרת בסביבה ימנית $[a,r)$ כלשהי.

נאמר כי f רציפה מימין בנקודה a אם לכל סדרה $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$, כך ש- $x_n \in [a,r)$ מתקיים כי $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(a)$, ונסמן זאת ע״י $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$.

ניתן להגדיר רציפות משמאל באופן אנאלוגי.

הגדרה – רציפות בקטע

תהא $f(x)$ פונקציה.

רציפות בקטע פתוח

נאמר כי f רציפה בקטע הפתוח (a,b) אם f רציפה בכל נקודה $a<x<b$ (ייתכן כי $a=\pm\infty$ ו- $b=\pm\infty$).

רציפות בקטע חצי פתוח

נאמר כי f רציפה בקטע החצי פתוח $[a,b)$ אם f רציפה בכל נקודה $a<x<b$, וגם f רציפה מימין ב- a (ייתכן כי $b=\pm\infty$).

רציפות בקטע סגור

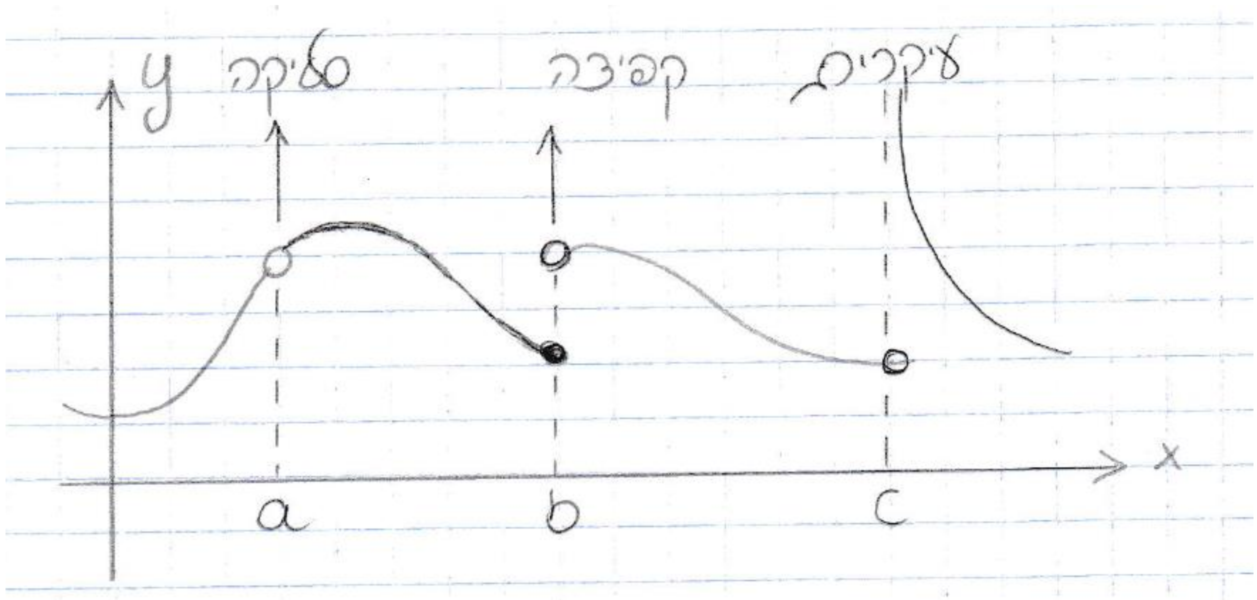
נאמר כי f רציפה בקטע הסגור $[a,b]$ אם f רציפה בכל נקודה $a<x<b$, וגם f רציפה מימין ב- a ומשמאל ב- b.

מיון נקודות אי-רציפות

תהא $f(x)$ פונקציה המוגדרת בסביבה מסויימת של הנקודה a פרט אולי ל- a עצמה.

- **נאמר כי a נקודת אי-רציפות סליקה, אם:**
  - קיים הגבול $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ **(והוא סופי)**.
  - $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$ או ש- f אינה מוגדרת ב- a.
- **נאמר כי a נקודת אי-רציפות מסוג ראשון (קפיצה), אם:**
  - קיימים הגבולות החד-צדדיים $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ ו- $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ **(והם סופיים)**.
  - $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$.

- **נאמר כי** a **נקודת אי-רציפות מסוג שני (עיקרית), אם:**
  - לפחות אחד מהגבולות החד-צדדיים בנקודה a אינו קיים (**או שאינם סופיים**).



משפט 4

אם סדרה $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L$ אזי $|a_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} |L|$.

פתרון

נתון כי $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L$.

עלינו להוכיח כי לכל $\varepsilon > 0$ קיים N כך שלכל $n > N$ מתקיים $\left||a_n| - |L|\right| < \varepsilon$. מהנתון, נובע כי קיים N_1 כך שלכל $n > N_1$ מתקיים $|a_n - L| < \varepsilon$. אם כן, לפי אי-שיוויון המשולש השני, נקבל כי לכל $n > N_1$:

$$\left||a_n| - |L|\right| \underset{\substack{\text{triangle} \\ \text{inequality \#2}}}{\le} |a_n - L| < \varepsilon.$$

אם כן, מכאן נובע כי $|a_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} |L|$.

תרגיל 1

הוכיחו כי $f(x) = |x|$ רציפה בכל $\mathbb{R}$.

פתרון

יהא $a \in \mathbb{R}$.

עלינו להראות כי $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} |x| = |a|$. אם כן, תהא $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$. ממשפט 3 לעיל, נובע כי $f(x_n) = |x_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} |a|$. לכן, לפי הגדרת גבול של פונקציה, נובע כי $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} |x| = |a|$.

תרגיל 2

תהא $f\left(x\right)=\begin{cases}2^{1/x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$. האם f רציפה ב- 0 ?

פתרון

נחשב את הגבולות החד-צדדיים :

$$\lim_{x\to 0^{+}} f\left(x\right)=\lim_{x\to 0^{+}} 2^{1/x} \underset{1/x\xrightarrow[x\to 0^{+}]{}+\infty}{=} +\infty\neq f\left(0\right)$$

$$\lim_{x\to 0^{-}} f\left(x\right)=\lim_{x\to 0^{-}} 2^{1/x} \underset{1/x\xrightarrow[x\to 0^{-}]{}-\infty}{=} 0=f\left(0\right)$$

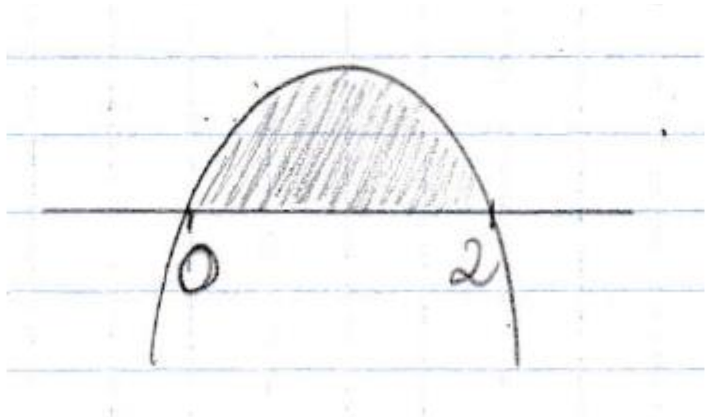
אם כן, הגבולות החד-צדדיים ב- 0 קיימים, אך שונים, ולכן הפונקציה אינה רציפה ב- 0 (אי רציפות מסדר שני). עם זאת, הפונקציה כן רציפה משמאל ב- 0.

תרגיל 3

הוכיחו כי $f(x)=\sqrt{x(2-x)}$ רציפה בקטע $[0,2]$.

פתרון

תחילה, נשים לב כי $f(x)$ אינה מוגדרת מחוץ לקטע $[0,2]$ (משום שמחוץ לקטע זה, נקבל כי $x(2-x)<0$ ולכן $\sqrt{x(2-x)}$ אינו מוגדר).



אנו יודעים כי כל פונקציה אלמנטרית רציפה בתחום הגדרת. הפונקציה $f(x)=\sqrt{x(2-x)}$ היא הרכבה של פונקציות אלמנטריות, המוגדרות בקטע $(0,2)$, ולכן, $f(x)$ היא פונקציה אלמנטרית המוגדרת בקטע $(0,2)$, ובפרט רציפה שם.

נותר להראות כי $f(x)$ רציפה מימין בנקודה 0 ורציפה משמאל בנקודה 2:

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\sqrt{x(2-x)}=\sqrt{\lim_{x\to0^+}(x)\cdot\lim_{x\to0^+}(2-x)}=\sqrt{0\cdot2}=0=f(0)$$

$$\lim_{x\to2^-} f(x)=\lim_{x\to2^-}\sqrt{x(2-x)}=\sqrt{\lim_{x\to2^-}(x)\cdot\lim_{x\to2^-}(2-x)}=\sqrt{2\cdot0}=0=f(2)$$

כלומר, הגבולות החד-צדדיים קיימים ושווים לערך הפונקציה בצוות, ולכן $f(x)$ רציפה בכל הקטע הסגור $[0,2]$.

תרגיל 4

בדקו את רציפות הפונקציה $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\left|x^2-1\right|}{x+1} & x\neq -1\\ -2 & x=-1\end{cases}$ בנקודה $x=-1$.

פתרון

נחשב את הגבולות החד-צדדיים של $f(x)$ בנקודה $x=-1$:

<u>חישוב הגבול החד-צדדי מימין:</u>

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\underbrace{\lim_{x\to -1^+}\frac{\left|x^2-1\right|}{x+1}=\lim_{x\to -1^+}\frac{-\left(x^2-1\right)}{x+1}}_{x\to -1^+\Rightarrow x^2<1}=\lim_{x\to -1^+}\frac{-(x-1)(x+1)}{x+1}=$$

$$=\lim_{x\to -1^+}-(x-1)=-\lim_{x\to -1^+}x-1=-(-2)=2\neq f(-1)$$

<u>חישוב הגבול החד-צדדי משמאל:</u>

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\underbrace{\lim_{x\to -1^-}\frac{\left|x^2-1\right|}{x+1}=\lim_{x\to -1^-}\frac{x^2-1}{x+1}}_{x\to -1^-\Rightarrow x^2>1}=\lim_{x\to -1^-}\frac{(x-1)(x+1)}{x+1}=\lim_{x\to -1^-}x-1=-2=f(-1)$$

אם כן, קיבלנו כי הגבולות החד-צדדיים שונים, ולכן הגבול $\lim_{x\to -1}f(x)$ לא קיים, כלומר $f(x)$ אינה רציפה בנקודה $x=-1$. עם זאת, הפונקציה $f(x)$ כן רציפה משמאל בנקודה $x=-1$.

תרגיל 5

קבעו באילו נקודות הפונקציה $f(x)=\left[|x|\right]-\left|[x]\right|$ לא רציפה, וקבעו את סוגן.

פתרון

תחילה, נשים לב כי עבור $x\geq 0$ נקבל כי $\left|[x]\right|=[x]$ וגם $|x|=x$, ולכן $f(x)=\left[|x|\right]-\left|[x]\right|=[x]-[x]=0$.

כעת נבחן את הפונקציה עבור $x<0$. במקרה זה מתקיים כי $\left|[x]\right|=-[x]$ וגם $|x|=-x$, כלומר נקבל כי:

$$f(x)=\left[|x|\right]-\left|[x]\right|=[-x]-(-[x])=[-x]+[x]$$

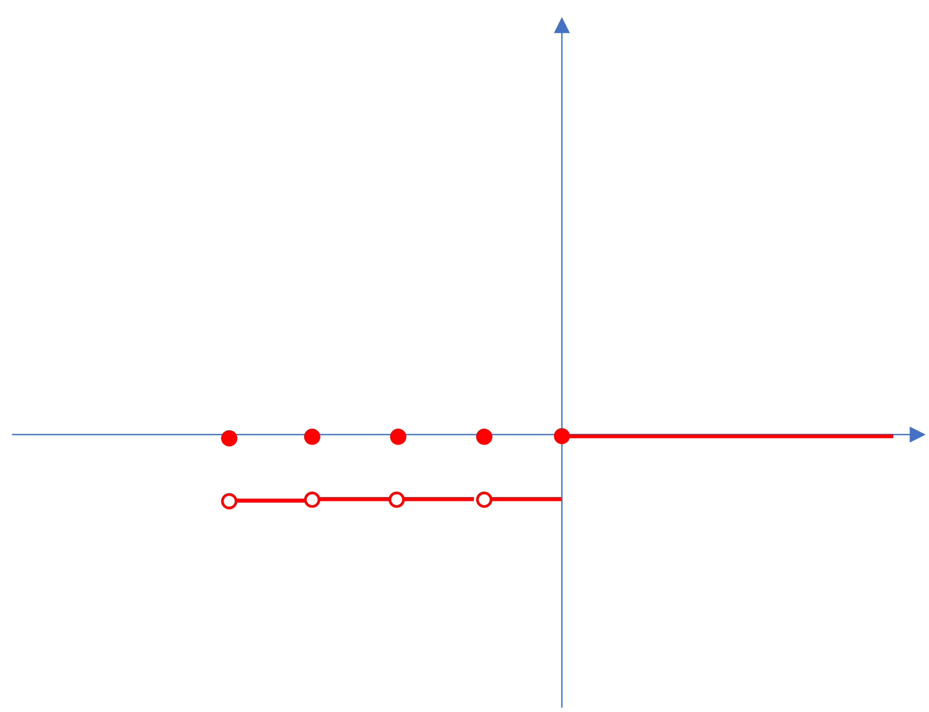
- **כאשר $x\in\mathbb{Q}$ (כלומר, כאשר x מספר שלם, אך שלילי):**

  נקבל כי $[-x]=-x$ וגם $[x]=x$, לכן $f(x)=[-x]+[x]=-x+x=0$.

- **כאשר $x\notin\mathbb{Q}$ (כלומר, כאשר x מספר ממשי שלילי, לא שלם):**

  במקרה זה, נקבל כי $[x]\leq x\leq[x]+1$, ולכן, לאחר הכפלת כל האגפים ב- -1, נקבל כי $-[x]\geq -x\geq -[x]-1$. כלומר, קיבלנו כי המספר השלם הראשון שקטן מ- $-x$ הוא $-[x]-1$, ולכן $f(x)=[-x]+[x]=-[x]-1+[x]=-1$.

כלומר, קיבלנו כי הפונקציה $f(x)$ נראית כך:



ולכן קל לראות כי בכל נקודה $x\in\mathbb{Q}$ כך ש- $x<0$ קיימת ל- f נקודת אי-רציפות סליקה, וכי בנקודה $x=0$ קיימת אי-רציפות מסדר ראשון (קפיצה).

תרגיל 6

הוכיחו כי אם:

- $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ כך ש- $a>0$ ו- $a_n>0$ לכל n
- $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} b$

אז $a_n^{b_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} a^b$.

היעזרו בכך שהפונקציות $f(x)=\ln x$ ו- $g(x)=e^x$ רציפות בתחום הגדרתן.

פתרון

תחילה, ניזכר כי $e^{\ln x}=x$.

משום ש- $e^d=x \Rightarrow \ln x=d$ ומכאן כי $e^{\ln x}=e^d=x$.

מכאן נובע כי אם $e^{\ln a_n^{b_n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{\ln a^b}$ אז $a_n^{b_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} a^b$. אך נשים לב כי אם $e^{\ln a_n^{b_n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{\ln a^b}$ אז גם בהכרח מתקיים כי $e^{b_n \ln a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{b\ln a}$. לכן, מספיק שנוכיח כי $e^{b_n \ln a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{b\ln a}$, ואז נוכל להסיק כי $a_n^{b_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} a^b$.

אם כן, מכך שנתון כי $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ כך ש- $a>0$ ו- $a_n>0$ לכל n, ומכך ש- $f(x)=\ln x$ רציפה בתחום הגדרת, נובע כי $\ln a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ln a$. כמו כן, מכך ש- $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} b$ ו- $\ln a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ln a$, נקבל מאריתמטיקה של גבולות כי גם $b_n \ln a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} b\ln a$. ולבסוף, מכך ש- $g(x)=e^x$ רציפה בתחום הגדרתה, נקבל כי מכך ש- $b_n \ln a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} b\ln a$ נובע כי $e^{b_n \ln a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{b\ln a}$.

<u>דוגמה לשימוש במסקנות התרגיל:</u>

$$\lim_{x\to\infty}\left(5+\frac{1}{x}\right)^{\frac{2x^2+6x+2}{x^2+9}}=5^2=25$$

תרגיל 7

נתונות שתי פונקציות רציפות $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

הוכיחו כי אם לכל $x\in\mathbb{Q}$ מתקיים כי $f(x)=g(x)$ אז גם לכל x **אי-רציונלי** מתקיים כי $f(x)=g(x)$.

פתרון

יהא x_0 מספר אי-רציונלי.

נניח כי קיימת סדרה $a_n\xrightarrow[n\to\infty]{}x_0$ כך ש- $a_n\in\mathbb{Q}$ לכל n (בהמשך נכתוב את הסדרה במפורש). אז מכך ש- f,g רציפות בכל תחום הגדרתן, נובע כי $f(a_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}f(x_0)$ וגם $g(a_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}g(x_0)$. אך מכך שלכל לכל $x\in\mathbb{Q}$ מתקיים כי $f(x)=g(x)$, נובע כי הסדרות $f(a_n)$ ו- $g(a_n)$ הן אותה הסדרה, ולכן בהכרח $g(x_0)=f(x_0)$.

כעת, נמצא את הסדרה a_n. אם כן, נגדיר $a_n=\frac{[n\cdot x_0]}{n}$ (זוהי אכן סדרה של מספרים רציונלים). מכאן, כי לפי הגדרת ערך שלם תחתון, נקבל כי:

$n\cdot x_0-1\le[n\cdot x_0]\le n\cdot x_0$, ומכאן כי $\frac{n\cdot x_0-1}{n}\le\frac{[n\cdot x_0]}{n}\le\frac{n\cdot x_0}{n}$, כלומר $x_0-\frac{1}{n}\le\frac{[n\cdot x_0]}{n}\le x_0$. לכן, לפי משפט הסנדוויץ', נקבל כי $a_n=\frac{[n\cdot x_0]}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}x_0$.

משפט ערך הביניים (המקרה הפרטי)

תהא $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע הסגור $[a,b]$. אם מתקיים כי $f(a)f(b)<0$, אז קיימת נקודה $c\in[a,b]$ כך ש- $f(c)=0$.

משפט ערך הביניים (המקרה הכללי)

תהא $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע הסגור $[a,b]$, ויהא t מספר ממשי בין $f(a)$ ל- $f(b)$ (כלומר, $f(a)\le t\le f(b)$ או ש- $f(b)\le t\le f(a)$). אז קיימת נקודה $c\in[a,b]$ כך ש- $f(c)=t$.

תרגיל 8

הוכיחו כי למשוואה $x^2+2\sin x=5$ קיים פתרון.

פתרון

אם ל- $x^2+2\sin x=5$ קיים פתרון, אז גם ל- $x^2+2\sin x-5=0$ קיים אותו הפתרון. לכן, נסמן $g(x)=x^2+2\sin x-5$ ונבדוק מתי $g(x)=0$.

אם כן, הפונקציה $g(x)$ היא צירוף של פונקציות אלמנטריות, ולכן $g(x)$ רציפה בכל תחום הגדרתה. כמו כן, נשים לב כי:

$$g(0)=0^2+2\sin 0-5=-5<0$$

$$g(2\pi)=(2\pi)^2+2\sin(2\pi)-5=4\pi^2+0-5=4\pi^2-5>0$$

אם כן, $g(x)$ רציפה בקטע $[0,2\pi]$, וגם $f(0)f(2\pi)<0$ ולכן קיימת נקודה $c\in[0,2\pi]$ כך ש- $g(c)=0$, ובפרט $c^2+2\sin c=5$.

תרגיל 9

הוכיחו כי אם $f\left(x\right)$ חד-חד-ערכית ורציפה בקטע $\left[a,b\right]$ אז לכל $a<x<b$ מתקיים כי $f\left(x\right)$ בין $f\left(a\right)$ ל- $f\left(b\right)$.

פתרון

נניח ללא הגבלת הכלליות כי $f\left(a\right)\le f\left(b\right)$, ונראה כי לכל $a<x<b$ מתקיים כי $f\left(a\right)\le f\left(x\right)\le f\left(b\right)$.

יהא $a<x<b$.

נניח בשלילה כי $f\left(x\right)\ge f\left(b\right)$ **:**

אם $f\left(x\right)=f\left(b\right)$ נקבל סתירה לחח״ע של f, לכן זה לא אפשרי.

אם $f\left(x\right)>f\left(b\right)$, אז נסמן $f\left(b\right)<\alpha<f\left(x\right)$.

מכך ש- $f\left(x\right)$ רציפה בקטע $\left[a,x\right]$, אז לפי משפט ערך הביניים הכללי, נובע כי קיימת נקודה $c_1\in\left[a,x\right]$ כך ש- $f\left(c_1\right)=\alpha$.

מכך ש- $f\left(x\right)$ רציפה בקטע $\left[x,b\right]$, אז לפי משפט ערך הביניים הכללי, נובע כי קיימת נקודה $c_2\in\left[x,b\right]$ כך ש- $c_2\ne c_1$ כך ש- $f\left(c_2\right)=\alpha$.

אם כן, קיבלנו שתי נקודות $c_2\ne c_1$ כך ש- $f\left(c_1\right)=f\left(c_2\right)$, וזו סתירה לחח״ע של f.

נניח בשלילה כי $f\left(x\right)\le f\left(b\right)$ **:**

הוכחה אנאלוגית.