תרגול 7

הגדרה – גבול של פונקציה (לפי היינה)

תהא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

נאמר כי ל- f יש גבול L ב- a אם לכל סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ המקיימת $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ ו- $x_n \neq a$ לכל n, מתקיים כי $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} L$.

הערה

כאשר נדבר על גבולות של פונקציות, נוכל להניח כי משפטי הגבולות שלמדנו עבור סדרות, נכונים גם עבור פונקציות. בפרט:

- אריתמטיקה של גבולות.
- יחידות הגבול.
- גבול של מכפלת פונקציה חסומה ופונקציה השואפת לאפס בנקודה:
  אם $g(x)$ חסומה ו- $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ אז $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)g(x)\right)=0$.
- משפט הסנדוויץ':
  אם $g(x)\le f(x)\le h(x)$ ו- $\lim\limits_{x\to a} g(x)=L=\lim\limits_{x\to a} h(x)$ אז $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$.

תרגיל 1

נתונה פונקציה $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x^2+2}$.

חשב את $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ לפי הגדרת הגבול של היינה.

פתרון

תהא $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה כלשהי המקיימת $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, כך ש- $x_n \neq 1$ לכל n.

נחשב את $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{{x_n}^3+1}{{x_n}^2+2}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left({x_n}^3+1\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left({x_n}^2+2\right)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left({x_n}^3\right)+\lim\limits_{n\to\infty}(1)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left({x_n}^2\right)+\lim\limits_{n\to\infty}(2)}=\frac{\left(\lim\limits_{n\to\infty}(x_n)\right)^3+1}{\left(\lim\limits_{n\to\infty}(x_n)\right)^2+2}=\frac{1^3+1}{1^2+2}=\frac{2}{3}$$

ולכן, לפי היינה, מתקיים כי $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\dfrac{2}{3}$.

תרגיל 2

נתונה פונקציה $f\left(x\right)=\frac{\sin x}{x}$.

חשב את $\lim_{x\to\infty} f\left(x\right)$ לפי הגדרת הגבול של היינה.

פתרון

תהא $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה כלשהי המקיימת $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$.

נחשב את $\lim_{n\to\infty} f\left(x_n\right)$:

אם כן, $\lim_{n\to\infty} f\left(x_n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x_n}{x_n}$. מכך ש- $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$, נובע כי $\frac{1}{x_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. כמו כן, הפונקציה $\sin x_n$ חסומה. לכן, לפי משפט, נובע כי $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x_n}{x_n}=0$.

לכן, לפי היינה, מתקיים כי $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$.

תרגיל 3

הוכח כי $\lim_{x\to 0}\cos\left(x\right)=1$ לפי הגדרת הגבול של היינה.

פתרון

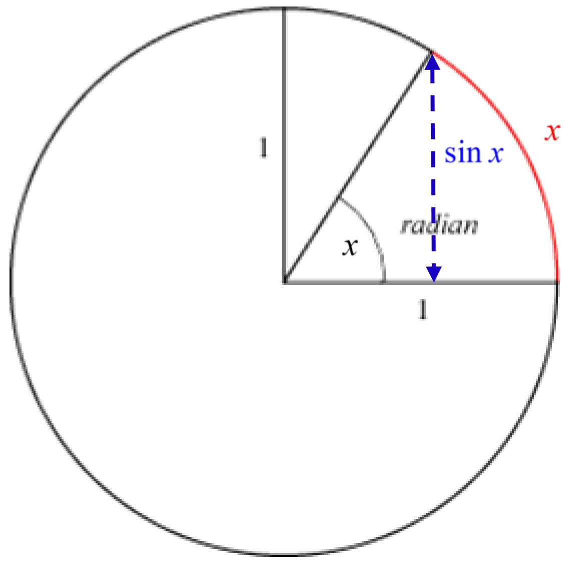
תחילה, נשים לב לשתי העובדות הבאות:

1. לכל x מתקיים כי $\left|\sin x\right|\le\left|x\right|$.

   מספיק שנראה כי $\sin x\le x$ עבור $x\ge 0$, ואז נוכל להסיק כי $\sin x\ge x$ לכל $x<0$ משום שמדובר בפונקציות אי-זוגיות.

   אם כן, כאשר $x>\frac{\pi}{2}$ ברור כי $\sin x\le x$, משום ש- $\sin x\le 1$ לכל x . נותר להוכיח כי $\sin x\le x$ כאשר

$0<x<\frac{\pi}{2}$. אם כן, נביט ברביע הראשון במעגל היחידה:



ניתן לראות כי אורך הקשת שמול הזווית x תמיד שווה לגודל הזווית (זו תכונה של מעגל היחידה), וברור כי אורך הקשת (האדומה) תמיד גדול מאורך הניצב (הכחול) שאורכו $\sin x$.

2. לכל x מתקיים כי $\cos(2x)=1-2\sin^2 x$.

ניתן להוכיח זאת ע"י שימוש בזהויות הטריגונומטריות הבאות:

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

אם כן, נוכיח זאת:

$$\cos(2x)=\cos(x+x)=\cos x\cos x-\sin x\sin x=\cos^2 x-\sin^2 x=1-\sin^2 x-\sin^2 x=1-2\sin^2 x$$

אם כן, תהא $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה כלשהי המקיימת $\lim_{n\to\infty}x_n=0$. אז לפי טענת עזר 1, לכל x_n מתקיים כי:

$$|\sin x_n|\le|x_n|\Rightarrow\left|\sin\frac{x_n}{2}\right|\le\left|\frac{x_n}{2}\right|\Rightarrow\left|\sin^2\frac{x_n}{2}\right|\le\left|\frac{x_n^2}{4}\right|\Rightarrow\left|\sin^2\frac{x_n}{2}\right|\le\frac{x_n^2}{4}\Rightarrow 0<\left|2\sin^2\frac{x_n}{2}\right|\le\frac{x_n^2}{2}$$

כלומר, קיבלנו כי $0<\left|2\sin^2\frac{x_n}{2}\right|\le\frac{x_n^2}{2}$. אך נשים לב כי מכך ש- $\lim_{n\to\infty}x_n=0$, נובע כי $\frac{x_n^2}{2}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$. לכן, לפי משפט הסנדוויץ', נקבל כי $\left|2\sin^2\frac{x_n}{2}\right|\xrightarrow[n\to\infty]{}0$.

אך נשים לב כי לפי טענת עזר 2, מתקיים כי:

$\left|2\sin^2\frac{x_n}{2}\right|=\left|1-\cos x_n\right|=1-\cos x_n$. לכן, נקבל כי:

$\left|2\sin^2\frac{x_n}{2}\right|\xrightarrow[n\to\infty]{}0\Rightarrow 1-\cos x_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0\Rightarrow \cos x_n\xrightarrow[n\to\infty]{}1$.

ולכן, לפי היינה, מתקיים כי $\lim\limits_{x\to 0}\cos(x)=1$.

תרגיל 4

הוכח/הפרך:

יהיו $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ו- $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציות. אם מתקיים כי $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$ ו- $\lim\limits_{x\to b}g(x)=c$ אז $\lim\limits_{x\to a}g(f(x))=c$.

פתרון

הטענה אינה נכונה, להלן דוגמה נגדית:

נבחר $a=b=4$.

$$f(x)=4$$

$$g(x)=\begin{cases}5 & x=4\\ 3 & x\neq 4\end{cases}$$

אז ברור כי $\lim\limits_{x\to 4}f(x)=4$ ו- $\lim\limits_{x\to 4}g(x)=3$. אך לאחר הרכבת הפונקציות, נקבל כי:

אז נקבל כי $\lim\limits_{x\to 4}g(f(x))=\lim\limits_{x\to 4}g(4)=\lim\limits_{x\to 4}5=5\neq 3$.

תרגיל 5

יהיו $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ו- $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציות. הוכח כי אם מתקיים כי $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$ כך ש- $f(x)\neq b$ לכל x, וגם $\lim\limits_{x\to b}g(x)=c$, אז $\lim\limits_{x\to a}g(f(x))=c$.

פתרון

נוכיח לפי הגדרת הגבול של היינה.

תהא $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה כלשהי, כך ש- $x_n\xrightarrow[n\to\infty]{}a$.

אז מכך ש- $\lim_{x\to a} f(x)=b$ נובע כי $f(x_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}b$. כמו כן, נתון כי $f(x_n)\neq b$ לכל x_n . לכן, נשתמש שוב בהגדרת הגבול של היינה, ונסיק כי משום ש- $\lim_{x\to b} g(x)=c$ וגם $f(x_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}b$ כך ש- $f(x_n)\neq b$, נובע כי $g(f(x_n))\xrightarrow[n\to\infty]{}c$, ושוב, מהגדרת הגבול של היינה, נסיק כי $\lim_{x\to a} g(f(x))=c$.

תרגיל 6

חשב את הגבול $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}$.

פתרון

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}{3\cdot 4\cdot\frac{x^2}{4}}=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}{3\cdot 4\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{6}\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{6}\left(\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)\right)^2$$

כעת נשים לב כי הביטוי $\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}$ הינו הרכבה של שתי פונקציות - $f(x)=\frac{x}{2}$ ו- $g(x)=\frac{\sin(x)}{x}$ כך ש- $g(f(x))=\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}$. כמו כן, נשים לב כי $\frac{x}{2}\xrightarrow[x\to 0]{}0$ ו- $\frac{\sin(x)}{x}\xrightarrow[x\to 0]{}1$, לכן לפי תרגיל 5, משום ש- $f(x)\neq 0$ לכל $x\neq 0$ מתקיים כי $g(f(x))=\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\xrightarrow[x\to 0]{}1$. לכן, נקבל כי:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\frac{1}{6}\left(\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)\right)^2=\frac{1}{6}(1)^2=\frac{1}{6}.$$

תרגיל 7

הוכח כי הגבול $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ לא קיים.

פתרון

נשתמש בהגדרת הגבול של היינה כדי להפריך את קיום הגבול.

נייח בשלילה כי קיים ל- $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ גבול. מכך נובע כי לכל שתי סדרות $x_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ ו- $y_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ מתקיים כי $\lim\limits_{x\to 0}\sin\left(\frac{1}{y_n}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\sin\left(\frac{1}{x_n}\right)$.

אך נשים לב כי עבור הסדרות הבאות:

$$a_n=\frac{1}{2\pi n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

$$b_n=\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

מתקיים כי:

$$\sin\left(\frac{1}{a_n}\right)=\sin\left(\frac{1}{\frac{1}{2\pi n}}\right)=\sin(2\pi n)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

$$\sin\left(\frac{1}{b_n}\right)=\sin\left(\frac{1}{\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}1$$

כלומר, מתקיים כי $\lim\limits_{x\to 0}\sin(b_n)\neq\lim\limits_{x\to 0}\sin(a_n)$ בסתירה להנחת השלילה. לכן, הנחת השלילה אינה נכונה, ובהכרח לא קיים גבול ל- $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$.

תרגיל 8

חשב את הגבול $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}$ עבור $\alpha,\beta\neq 0$.

פתרון

תחילה נזכיר כי $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ (הוזכר בהרצאות), ומכך נובע, לפי אריתמתיקה של גבולות, כי גם $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sin x}=1$.
נשתמש בעובדות אלו, במסקנות של תרגיל 5, כדי לחשב את הגבול:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin\alpha x}{\alpha x}\cdot\frac{\alpha x}{\beta x}\cdot\frac{\beta x}{\sin\beta x}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin\alpha x}{\alpha x}\right)\cdot\lim_{x\to0}\left(\frac{\alpha x}{\beta x}\right)\cdot\lim_{x\to0}\left(\frac{\beta x}{\sin\beta x}\right)=1\cdot\frac{\alpha}{\beta}\cdot1=\frac{\alpha}{\beta}.$$

תרגיל 9

חשב את $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{x}{a}\cdot\left[\frac{b}{x}\right]\right)$ עבור $a,b>0$.

פתרון

נשתמש בהגדרת הגבול לפי היינה.

תהא $x_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ כך ש- $x_n\neq0$. אנו רוצים למצוא את הגבול $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{a}\cdot\left[\frac{b}{x_n}\right]\right)$. לפי הגדרת פונקציית ערך שלם תחתון, מתקיים כי:

$$\frac{b}{x_n}-1\le\left[\frac{b}{x_n}\right]\le\frac{b}{x_n}$$

נכפיל את שני האגפים ב- $\frac{x_n}{a}$.

כאשר $x_n>0$ נקבל כי:

$$\frac{x_n}{a}\left(\frac{b}{x_n}-1\right)\le\frac{x_n}{a}\left[\frac{b}{x_n}\right]\le\frac{x_n}{a}\frac{b}{x_n}\Rightarrow\frac{x_n}{a}\frac{b}{x_n}-\frac{x_n}{a}\le\frac{x_n}{a}\left[\frac{b}{x_n}\right]\le\frac{x_n}{a}\frac{b}{x_n}\Rightarrow\frac{b}{a}-\frac{x_n}{a}\le\frac{x_n}{a}\left[\frac{b}{x_n}\right]\le\frac{b}{a}$$

כלומר, קיבלנו כי $\frac{b}{a}-\frac{x_n}{a}\le\frac{x_n}{a}\left[\frac{b}{x_n}\right]\le\frac{b}{a}$.

כאשר $x_n<0$ נקבל כי:

$$\frac{x_n}{a}\left(\frac{b}{x_n}-1\right)\ge\frac{x_n}{a}\left[\frac{b}{x_n}\right]\ge\frac{x_n}{a}\frac{b}{x_n}\Rightarrow\frac{x_n}{a}\frac{b}{x_n}-\frac{x_n}{a}\ge\frac{x_n}{a}\left[\frac{b}{x_n}\right]\ge\frac{x_n}{a}\frac{b}{x_n}\Rightarrow\frac{b}{a}-\frac{x_n}{a}\ge\frac{x_n}{a}\left[\frac{b}{x_n}\right]\ge\frac{b}{a}$$

כלומר, קיבלנו כי $\frac{b}{a}-\frac{x_n}{a}\ge\frac{x_n}{a}\left[\frac{b}{x_n}\right]\ge\frac{b}{a}$.

אם כן, משום ש- $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, קיבלנו כי בכל אחד משני המקרים, איברי הסדרה $\frac{x_n}{a}\left[\frac{b}{x_n}\right]$ כלואים בין שתי סדרות אשר גבולן הוא $\frac{b}{a}$. לכן, לפי סנדוויץ', נקבל כי $\frac{x_n}{a}\left[\frac{b}{x_n}\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{b}{a}$.

לכן, לפי היינה, מתקיים כי $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x}{a}\cdot\left[\frac{b}{x}\right]\right)=\frac{b}{a}$.

תרגיל 10

חשב את $\lim\limits_{x\to 0}\left(\left[\frac{x}{a}\right]\cdot\frac{b}{x}\right)$ עבור $a,b>0$.

פתרון

נחשב את הגבול לפי הגדרת הגבול של היינה.

אנו רוצים לחשב את $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left[\frac{x_n}{a}\right]\cdot\frac{b}{x_n}\right)$ בהינתן סדרה $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ כלשהי. למעשה, ניתן לראות כי הגבול לא קיים.

נביט בשתי הסדרות הבאות:

$$x_n=\frac{a}{n+1}\xrightarrow[n\to 0]{}0$$

$$y_n=-\frac{a}{n+1}\xrightarrow[n\to 0]{}0$$

לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים כי $\frac{x_n}{a}=\frac{\frac{a}{n+1}}{a}=\frac{1}{n+1}$ ו- $\frac{y_n}{a}=\frac{-\frac{a}{n+1}}{a}=-\frac{1}{n+1}$. אך ברור כי $0<\frac{1}{n+1}<1$ וכי $-1<-\frac{1}{n+1}<0$, ומכאן כי $\left[\frac{x_n}{a}\right]=0$ ו- $\left[\frac{y_n}{a}\right]=-1$. לכן, נקבל כי:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left[\frac{x_n}{a}\right]\cdot\frac{b}{x_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(0\cdot\frac{b}{x_n}\right)=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left[\frac{y_n}{a}\right]\cdot\frac{b}{x_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(-1\cdot\frac{b}{y_n}\right)=-\infty$$

כלומר, מצאנו כי $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left[\frac{y_n}{a}\right]\cdot\frac{b}{x_n}\right)\neq\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left[\frac{x_n}{a}\right]\cdot\frac{b}{x_n}\right)$, ולכן, לפי היינה, הגבול $\lim\limits_{x\to 0}\left(\left[\frac{x}{a}\right]\cdot\frac{b}{x}\right)$ לא קיים.

תרגיל 11

יהיו $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ו- $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציות.

הוכח/הפרך:

1. אם $\lim_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)=0$ אז $\lim_{x\to a} f(x)=-\lim_{x\to a} g(x)$.
2. אם $\lim_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)=0$ ו- $\lim_{x\to a} f(x)=L$ אז $\lim_{x\to a} g(x)=-L$.

פתרון סעיף א'

הטענה אינה נכונה – וזאת משום שלא נאמר לנו כי הגבולות $\lim_{x\to a} f(x)$ ו- $\lim_{x\to a} g(x)$ בהכרח קיימים. להלן דוגמה נגדית:

$$f(x)=\begin{cases}-1 & x>a\\ 1 & x\le a\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}1 & x>a\\ -1 & x\le a\end{cases}$$

ברור כי $\lim_{x\to a} f(x)$ ו- $\lim_{x\to a} g(x)$ אינם קיימים, אך כן מתקיים כי $\lim_{x\to a}(0)=0$ $\lim_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)=$.

פתרון סעיף ב'

הטענה נכונה.

נראה זאת ע"י שימוש באריתמטיקה של גבולות:

$$\lim_{x\to a} g(x)=\lim_{x\to a}\left(g(x)+f(x)-f(x)\right)=\lim_{x\to a}\left(g(x)+f(x)\right)-\lim_{x\to a}\left(f(x)\right)=0-L=-L$$