תרגול 6

הגדרה – תת-סדרה

הגדרה לא פורמלית

תהא $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה.

נאמר כי $\left\{a_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ הינה תת-סדרה של הסדרה המקורית $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ אם היא נוצרה ע"י הסרת של חלק מהאיברים של $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$.

נשים לב כי איברי תת-הסדרה חייבים לשמור על הסדר של איברי הסדרה המקורית.

הגדרה פורמלית

תהא $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה, ותהא $\left\{n_k\right\}_{k=1}^{\infty}$ סדרה עולה ממש של מספרים טבעיים. אז הסדרה $\left\{a_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ נקראת תת-סדרה של $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$.

דוגמה

נסתכל על הסדרה $a_n=\frac{1}{n}$.

אז נקבל כי הסדרות הבאות הינן תת-סדרות של $a_n=\frac{1}{n}$:

✓ $\left\{a_{2k-1}\right\}_{k=1}^{\infty}=1, 1/3, 1/5,\dots$

✓ $\left\{a_{k^2}\right\}_{k=1}^{\infty}=1, 1/4, 1/9,\dots$

מנגד, הסדרות הבאות אינן תת-סדרות של $a_n=\frac{1}{n}$:

× $b_n=1, 1/5, 1/3, 1/7,\dots$ זו אינה תת-סדרה של $a_n=\frac{1}{n}$ משום שהוחלף הסדר של האיברים $1/5$ ו- $1/3$.

× $b_n=2,1, 1/2, 1/4, 1/8,\dots$ זו אינה תת-סדרה של $a_n=\frac{1}{n}$ משום שהוספנו איבר שלא קיים בסדרה המקורית.

× $b_n=1, 1/2, 1/4$ זו אינה סדרה, ובפרט גם אינה תת-סדרה של הסדרה המקורית, משום שיש בה מספר סופי של איברים.

דוגמה

נסתכל על הסדרה $a_n = 0,1,0,1,0,1,0,1,\dots$.

האם הסדרה $b_n = 1,1,1,1,1,1,1,\dots$ הינה תת-סדרה של a_n?

כן, משום שמחקנו את כל האפסים מהסדרה המקורית.

האם הסדרה $b_n = 1,1,1,0,0,\dots$ הינה תת-סדרה של a_n?

כן, משום שניתן לקבלה ע"י מחיקה של a_1, a_3, a_5, a_8 וכן הלאה.. (באופן כללי, כל צירוף של אפסים ואחדות הינו תת-סדרה של a_n).

משפט 1 – בולצנו-ויירשטרס (ללא הוכחה)

תהא $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה.

אם a_n חסומה, אז קיימת לה תת-סדרה מתכנסת.

משפט 2 (ללא הוכחה)

תהא $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה.

אם $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במובן הרחב (לגבול סופי או אינסופי), אז כל תת-סדרה של $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לאותו גבול.

משפט 3 (מסקנה ממשפט 2)

תהא $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה.

אם ל- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ יש שתי תת-סדרות עם גבולות שונים, אז אין לה גבול.

דוגמה

נסתכל על הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = (-1)^n$. אנו יודעים שלסדרה זו אין גבול, ובפרט, יש לה שתי תת-סדרות מתכנסות לגבולות שונים (הסדרה $b_n = 1$ והסדרה $c_n = -1$).

הגדרה – גבול חלקי

תהא $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה, ותהא $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ תת-סדרה מתכנסת במובן הרחב של $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

אז הגבול של $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ נקרא גבול חלקי של $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

דוגמה

נסתכל על הסדרה הבאה:

$$a_n = 1,1,2,1,2,3,1,2,3,4,1,2,3,4,5,\ldots$$

נשים לב כי כל מספר טבעי הוא גבול חלקי של a_n.

למשל, לפי התבנית של a_n, הסדרה $b_n = 2$ הינה תת-סדרה של a_n. אך הגבול של $b_n = 2$ הוא 2, ולכן 2 הוא גבול חלקי של a_n.

משפט 4 – ״הפיצה״ (ללא הוכחה)

יהיו $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ו- $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרות.

אם $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ וגם לכל n מתקיים כי $a_n \geq b_n$, אז $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$.

תרגיל 1

הוכיחו כי לכל סדרה יש תת-סדרה מתכנסת במובן הרחב (כלומר, מתכנסת לגבול סופי או אינסופי).

הוכחה

תהא $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה.

אם a_n חסומה, אז קיימת לה תת-סדרה מתכנסת לפי משפט בולצאנו-ויירשטרס.

אם a_n אינה חסומה, אז או שאינה חסומה מלמעלה, או שאינה חסומה מלמטה. נניח ללא הגבלת הכלליות כי a_n אינה חסומה מלמעלה, ונבנה תת-סדרה $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ כך ש- $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = \infty$.

אם כן, מכך ש- a_n אינה חסומה מלמעלה, נובע כי לכל M קיים n כך ש- $a_n > M$.

מכך נובע כי ניתן לבחור אינדקס n_1 כך ש- $a_{n_1} > 1$ (חייב להיות קיים אינדקס n_1 כנדרש, משום שאחרת הסדרה a_n היתה חסומה מלמעלה).

כמו כן, ניתן לבחור אינדקס $n_1 < n_2$ המקיים $a_{n_2} > 2$ (ושוב, חייב להיות קיים אינדקס n_2 כנדרש, משום שאחרת הסדרה a_n היתה חסומה מלמעלה).

נמשיך לפי תבנית זו.

אם כן, קיבלנו כי תת-הסדרה שבנינו מקיימת כי לכל k טבעי מתקיים $a_{n_k} > k$, ולכן, ממשפט ״הפיצה״ נקבל כי $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = \infty$, משום ש- $\lim\limits_{k\to\infty} k = \infty$.

תרגיל 2

חשב את $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n!]{n!}$.

פתרון

נסמן $a_n=\sqrt[n]{n}$.

אז הסדרה $b_n=\sqrt[n!]{n!}$ הינה תת-סדרה של a_n. אך אנו יודעים כי $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$, ולכן כל תת-סדרה של a_n מתכנסת ל-1, ובפרט $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n!]{n!}=1$.

תרגיל 3

תהא $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית.

אם קיימת ל- a_n תת-סדרה $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ כך ש- $\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k}=L$ אז $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=L$.

הוכחה

אם כן, תהא $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית, ונניח כי קיימת תת-סדרה $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ כך ש- $\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k}=L$.

נוכיח תחילה כי a_n מתכנסת. נפריד לשני מקרים:

אם a_n חסומה, אז מכך ש- a_n מונוטונית, נקבל לפי משפט שלמדנו, כי a_n מתכנסת (סדרה מונוטונית וחסומה היא סדרה מתכנסת).

אם a_n אינה חסומה, אז מכך שהיא מונוטונית, נובע כי $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$ או $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=-\infty$, ולכן, לפי משפט 2, גם כל תת-סדרה של a_n מתכנסת ל- ∞ או $-\infty$ (בהתאמה), בסתירה לכך ש- $\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k}=L$ (כלומר, בסתירה לכך שתת-הסדרה $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ מתכנסת). כלומר, לא ייתכן כי a_n אינה חסומה.

אם כן, מכאן נובע כי האופציה האפשרית היחידה, הינה כי a_n חסומה, ולכן מתכנסת. כעת נניח בשלילה כי $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=P$ כך ש- $P\neq L$. אז שוב, לפני משפט 2 נובע כי חייב להתקיים כי $\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k}=P$, בסתירה לכך ש- $\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k}=L$ (סדרה לא יכולה להתכנס לשני גבולות שונים). לכן, הנחת השלילה שגויה, ולכן בהכרח מתקיים $P=L$.

תרגיל 4

תהא $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה.

אם $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ ולכל n מתקיים $a_n > L$ אז קיימת ל- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ תת-סדרה מונוטונית.

הערה 1: ההוכחה עבור המקרה $a_n < L$ הינה סימטרית.

הערה 2: ההוכחה עבור המקרה $a_n = L$ הינה טריוויאלית.

הוכחה

אם כן, נניח כי $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ ולכל n מתקיים $a_n > L$, ונבנה תת-סדרה מונוטונית $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$.

תחילה, נבחר $a_{n_1} = a_1$.

מכך ש- $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ נובע כי עבור $\varepsilon_1 = a_{n_1} - L$, החל ממקום מסויים, כל איברי a_n מקיימים $L < a_n < L + \varepsilon_1 = L + a_{n_1} - L = a_{n_1}$. בפרט, קיים $n_2 > n_1$ כך ש- $L < a_{n_2} < a_{n_1}$ (משום שאם לא היה קיים n_2 אז היה מספר סופי של איברים שהיו מקיימים כי $L < a_n < L + \varepsilon_1$, בסתירה לקיום הגבול).

באופן דומה, מכך ש- $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ נובע כי עבור $\varepsilon_2 = a_{n_2} - L$, החל ממקום מסויים, כל איברי a_n מקיימים $L < a_n < L + \varepsilon_2 = L + a_{n_2} - L = a_{n_2}$. בפרט, קיים $n_3 > n_2$ כך ש- $L < a_{n_3} < a_{n_2}$ (משום שאם לא היה קיים n_3 אז היה מספר סופי של איברים שהיו מקיימים כי $L < a_n < L + \varepsilon_2$, בסתירה לקיום הגבול).

ובאופן כללי, מכך ש- $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ נובע כי עבור $\varepsilon_k = a_{n_k} - L$, החל ממקום מסויים, כל איברי a_n מקיימים $L < a_n < L + \varepsilon_k = L + a_{n_k} - L = a_{n_k}$. בפרט, קיים $n_{k+1} > n_k$ כך ש- $L < a_{n_{k+1}} < a_{n_k}$.

אם כן, קיבלנו כי $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ הינה תת-סדרה של $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ המקיימת $a_{n_{k+1}} < a_{n_k}$, ולכן היא סדרה מונוטונית.

תרגיל 5

תהא $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה.

אם $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ אז קיימת ל- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ תת-סדרה מונוטונית.

הוכחה

נשים לב כי אחת משלושת האפשרויות הבאות חייבת להתקיים:

1. ישנם אינסוף איברים המקיימים כי $a_n = L$.
2. ישנם אינסוף איברים המקיימים כי $a_n > L$.
3. ישנם אינסוף איברים המקיימים כי $a_n < L$.

אם אפשרות מספר 1 מתקיימת, אז ברור שיש ל- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ תת-סדרה מונוטונית, וזו הסדרה $a_{n_k} = L$.

אם אפשרות מספר 2 מתקיימת, אז נבנה תת-סדרה $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ המורכבת מכל האיברים ב- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ המקיימים $a_n > L$, לפי סדר הופעתם. לפי התרגיל הקודם, קיימת ל- $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ תת-סדרה $\{a_{n_{k_l}}\}_{l=1}^{\infty}$ מונוטונית. בפרט, $\{a_{n_{k_l}}\}_{l=1}^{\infty}$ היא גם תת-סדרה של $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

אם אפשרות מספר 3 מתקיימת, אז נבנה תת-סדרה $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ המורכבת מכל האיברים ב- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ המקיימים $a_n < L$, לפי סדר הופעתם. ושוב, לפי התרגיל הקודם (עבור המקרה הסימטרי), קיימת ל- $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ תת-סדרה $\{a_{n_{k_l}}\}_{l=1}^{\infty}$ מונוטונית. בפרט, $\{a_{n_{k_l}}\}_{l=1}^{\infty}$ היא גם תת-סדרה של $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

תרגיל 6

תהא $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה.

אם $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה, אז קיימת לה תת-סדרה מונוטונית.

הוכחה

נתון כי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה. לכן, לפי משפט בולצאנו-ויירשטראס, קיימת ל- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ תת-סדרה $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ מתכנסת. לפי תרגיל 5, קיימת ל- $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ תת-סדרה $\{a_{n_{k_l}}\}_{l=1}^{\infty}$ מונוטונית, שהיא בפרט תת-סדרה של $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

תרגיל 7

תהא $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה.

הוכח כי אם $\lim_{k\to\infty} a_{2k} = L$ וגם $\lim_{k\to\infty} a_{2k-1} = L$, אז גם $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

הוכחה

יהי $\varepsilon > 0$.

מכך ש- $\lim_{k\to\infty} a_{2k} = L$ נובע כי עבור ε קיים K_1 כך שלכל $k > K_1$ מתקיים $|a_{2k} - L| < \varepsilon$.

מכך ש- $\lim_{k\to\infty} a_{2k-1} = L$ נובע כי עבור ε קיים K_2 כך שלכל $k > K_2$ מתקיים $|a_{2k-1} - L| < \varepsilon$.

ומכאן כי עבור $K=\max\left\{K_1,K_2\right\}$ מתקיים כי לכל $k>K$ מתקיים $\left|a_{2k-1}-L\right|<\varepsilon$ וגם $\left|a_{2k}-L\right|<\varepsilon$. כלומר, החל מהמקום ה- $2K-1$ בסדרה a_n, כל איבר במיקום זוגי וכל איבר במיקום אי-זוגי נמצאים בסביבת ε של L.

משום שאיחוד של האיברים במיקום הזוגי והאיברים במיקום האי-זוגי מכסה את כל איברי הסדרה החל מהמקום ה- $2K-1$, נקבל כי עבור $N=2K-1$ מתקיים כי לכל $n>N$ מתקיים $\left|a_n-L\right|<\varepsilon$.

מסקנה מתרגיל 7 (ללא הוכחה)

תהא $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה.

אם קיימות m תתי-סדרות זרות אשר כולן שואפות לגבול L, כך שאיחודן משחזר את הסדרה $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$, אז $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=L$.

תרגיל 8

תן דוגמה לסדרה $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$, המהווה איחוד של **<u>אינסוף</u>** תתי-סדרות זרות, השואפות כולן לגבול L, אבל ל- $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ לא קיים גבול.

פתרון

נסתכל על הסדרה הבאה:

$$a_n=1,2,0,3,0,0,4,0,0,0,5,0,0,0,0,6,\ldots$$

נסדר אותה מחדש באופן הבא:

$$\begin{array}{cccccc}
1 & & & & & \\
2 & 0 & & & & \\
3 & 0 & 0 & & & \\
4 & 0 & 0 & 0 & & \\
5 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & & & & &
\end{array}$$

קל לראות כי:

- תת-הסדרה אדומה שואפת ל- 0.
- תת-הסדרה הכחולה שואפת ל- 0.
- תת-הסדרה הכתומה שואפת ל- 0.
- ובאופן כללי, כל תת-סדרה שמוגדרת ע״י אלכסון, שואפת ל- 0.

כלומר, יצרנו אינסוף תתי-סדרות זרות, אשר כולן שואפות לאותו גבול, ואיחודן משחזר את a_n. למרות זאת, ל- a_n קיימת גם תת-הסדרה $b_n = 1,2,3,4,5,6,\dots$ השואפת לאינסוף. כלומר, מצאנו כי ל- a_n קיימות שתי תתי-סדרות השואפות לגבולות שונים, ולכן ל- a_n לא קיים גבול.

הגדרה – קריטריון קושי

תהא $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה מעל $\mathbb{R}$.

הסדרה a_n נקראת סדרת קושי, אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים N כך שלכל $m,n > N$ מתקיים $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

הגדרה שקולה

הסדרה a_n נקראת סדרת קושי, אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים N כך שלכל $n > N$ ולכל $p \in \mathbb{N}$ מתקיים $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$.

משפט 5

תהא $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה מעל $\mathbb{R}$.

הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת אמ"מ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת קושי.

תרגיל 9

נשים לב כי בקריטריון קושי, אנחנו דורשים כי לכל $\varepsilon > 0$ מתקיים $|a_n - a_m| < \varepsilon$ **<u>לכל</u>** m,n החל ממקום מסויים.

נניח והיינו מציגים דרישה חלשה יותר - לכל $\varepsilon > 0$ מתקיים $|a_n - a_{n+1}| < \varepsilon$ **<u>לכל</u>** n החל ממקום מסויים. מצאו סדרה המקיימת דרישה חלשה זו, אך אינה מתכנסת.

פתרון

נביט בסדרה הבאה:

$$a_n = 1 \quad ,2 \quad ,2+\frac{1}{2} \quad ,3 \quad ,3+\frac{1}{3} \quad ,3+\frac{2}{3} \quad ,4 \quad ,4+\frac{1}{4} \quad ,4+\frac{2}{4} \quad ,4+\frac{3}{4} \quad ,5 \quad ,5+\frac{1}{5} \quad ,5+\frac{2}{5} \quad ,5+\frac{3}{5} \quad \dots$$

קל לראות כי סדרה זו שואפת לאינסוף, וגם כי לכל $\varepsilon > 0$ מתקיים $|a_n - a_{n+1}| < \varepsilon$ **<u>לכל</u>** n החל ממקום מסויים.
למשל, החל מהמקום הרביעי הסדרה, המרחק בין כל שני איברים עוקבים קטן מחצי, החל מהמקום השביעי, המרחק בין כל שני איברים עוקבים בסדרה קטן משליש, וכו'...

תרגיל 10

הוכח כי הסדרה $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ מתכנסת.

פתרון

נראה כי $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=a_n$ היא סדרת קושי, ולכן מתכנסת.

יהי $\varepsilon>0$.

נראה כי החל ממקום מסויים מתקיים כי $\left|a_{n+p}-a_n\right|<\varepsilon$. אם כן:

$$\left|a_{n+p}-a_n\right|=\left|\sum_{k=1}^{n+p}\frac{1}{k^2}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}+\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k^2}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\right|=\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k^2}\right|=\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k^2}=$$

$$=\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots+\frac{1}{(n+p)^2}<\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\ldots+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)}=$$

$$=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n}$$

כעת, אם נדרוש $\frac{1}{n}<\varepsilon$ נקבל כי $n>1/\varepsilon$.

כלומר, מצאנו כי לכל $\varepsilon>0$ קיים $N=\frac{1}{\varepsilon}$ כך שלכל $n>N$ ולכל $p\in\mathbb{N}$ מתקיים $\left|a_{n+p}-a_n\right|<\varepsilon$.

אם כן, הוכחנו כי $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=a_n$ סדרת קושי לפי הגדרה, ולכן לפי משפט 5 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=a_n$ סדרה מתכנסת.