# תרגול 5

## משפט 1 (ללא הוכחה)

תהא $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה כך ש- $a_n > 0$ לכל $n$.

אז מתקיים כי $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = L \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$ (זה לא בהכרח מתקיים בכיוון ההפוך).

## משפט 2

תהא $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה. אם מתקיים $\lim_{x\to\infty} a_n = L$ כך ש- $L > 0$, אז קיים $N$ כך שלכל $n > N$ מתקיים $a_n > 0$.

### הוכחה

נתון כי $\lim_{x\to\infty} a_n = L$. לכן, עבור $\varepsilon = L/2$ קיים $N$ כך שלכל $n > N$ מתקיים $|a_n - L| < L/2$. כלומר, $-L/2 < a_n - L < L/2 \Rightarrow L/2 < a_n < \frac{3}{2}L$. אם כן, קיבלנו כי עבור ה- $N$ שמתאים ל- $\varepsilon = L/2$ מתקיים כי לכל $n > N$ מתקיים $0 < L/2 < a_n$.

## משפט 3

יהא $c \in \mathbb{R}$ כך ש- $c < |1|$. אזי $\lim_{n\to\infty} c^n = 0$.

### הוכחה

עבור $c = 0$ מתקיים כי $\lim_{n\to\infty} c^n = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$.

עבור $c \neq 0$, עלינו להוכיח כי לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N$ כך שלכל $n > N$ מתקיים $|c^n - 0| < \varepsilon$.

יהי $\varepsilon > 0$.

$|c^n - 0| = |c^n| = |c|^n$.

נבדוק מתי $|c|^n < \varepsilon$. **(יש לזכור כי במקרה זה $0 < |c| < 1$, ולכן $\log|c| < 0$. זו הסיבה לכך שסמין האי-שיוויון מתהפך באי-השיוויון למטה).**

$$|c|^n < \varepsilon \Rightarrow \log|c|^n < \log\varepsilon \Rightarrow \underbrace{n\log|c| < \log\varepsilon \Rightarrow n > \frac{\log\varepsilon}{\log|c|}}_{\substack{\text{Pay attention that } 0<|c|<1\text{, and therefore } \log|c|<0 \\ \text{That's the reason why the inequality sign was negated}}}$$

כלומר, בהינתן $\varepsilon > 0$, עבור $N = \frac{\log \varepsilon}{\log |c|}$ מתקיים כי לכל $n > N$ מתקיים $|c^n - 0| < \varepsilon$.

## משפט 4

לכל $x, y \in \mathbb{R}$ ו- $k \in \mathbb{N}$ מתקיים כי $x^k - y^k = (x-y) \cdot \sum_{i=0}^{k-1} x^i y^{k-1-i}$.

## הוכחה

$$(x-y) \cdot \sum_{i=0}^{k-1} x^i y^{k-1-i} = x \cdot \left( \sum_{i=0}^{k-1} x^i y^{k-1-i} \right) - y \cdot \left( \sum_{i=0}^{k-1} x^i y^{k-1-i} \right) = \left( \sum_{i=0}^{k-1} x^{i+1} y^{k-1-i} \right) - \left( \sum_{i=0}^{k-1} x^i y^{k-i} \right) = \ldots$$

$$\ldots = \left( \sum_{i=0}^{k-2} \left( x^{i+1} y^{k-1-i} \right) + x^{k-1+1} y^{k-1-(k-1)} \right) - \left( x^0 y^{k-0} + \sum_{i=1}^{k-1} \left( x^i y^{k-i} \right) \right) = \left( \sum_{i=0}^{k-2} \left( x^{i+1} y^{k-1-i} \right) + x^k \right) - \left( y^k + \sum_{i=1}^{k-1} \left( x^i y^{k-i} \right) \right) = \ldots$$

$$\ldots = \left( \sum_{i=0}^{k-2} \left( x^{i+1} y^{k-1-i} \right) + x^k \right) - \left( y^k + \sum_{i=0}^{k-2} \left( x^{i+1} y^{k-(i+1)} \right) \right) = \left( \sum_{i=0}^{k-2} \left( x^{i+1} y^{k-1-i} \right) + x^k \right) - \left( y^k + \sum_{i=0}^{k-2} \left( x^{i+1} y^{k-1-i} \right) \right) = \ldots$$

$$\ldots = \sum_{i=0}^{k-2} \left( x^{i+1} y^{k-1-i} \right) + x^k - y^k - \sum_{i=0}^{k-2} \left( x^{i+1} y^{k-1-i} \right) = x^k - y^k$$

## משפט 5

תהא $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה כך ש- $a_n > 0$ לכל $n$, ויהא $k \in \mathbb{N}$.

אם $\lim_{x \to \infty} a_n = L$ כך ש- $L > 0$ אז $\lim_{x \to \infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{L}$.

## הוכחה

נניח כי $\lim_{x \to \infty} a_n = L > 0$.

עלינו להוכיח כי $\lim_{x \to \infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{L}$ עבור $k \in \mathbb{N}$. כלומר, שלכל $\varepsilon > 0$ קיים $N$ כך שלכל $n > N$ מתקיים $\left| \sqrt[k]{a_n} - \sqrt[k]{L} \right| < \varepsilon$.

אם כן, יהי $\varepsilon > 0$.

נשים לב כי לפי משפט 4, מתקיים כי

$$\left( \sqrt[k]{a_n} \right)^k - \left( \sqrt[k]{L} \right)^k = \left( \sqrt[k]{a_n} - \sqrt[k]{L} \right) \cdot \sum_{i=0}^{k-1} \left( \sqrt[k]{a_n} \right)^i \left( \sqrt[k]{L} \right)^{k-1-i} \Rightarrow \sqrt[k]{a_n} - \sqrt[k]{L} = \frac{\left( \sqrt[k]{a_n} \right)^k - \left( \sqrt[k]{L} \right)^k}{\sum_{i=0}^{k-1} \left( \sqrt[k]{a_n} \right)^i \left( \sqrt[k]{L} \right)^{k-1-i}} = \frac{a_n - L}{\sum_{i=0}^{k-1} \left( \sqrt[k]{a_n} \right)^i \left( \sqrt[k]{L} \right)^{k-1-i}}$$

ומכאן כי:

$$\left|\sqrt[k]{a_n}-\sqrt[k]{L}\right|=\left|a_n^{1/k}-L^{1/k}\right|=\underbrace{\left|\frac{a_n-L}{\sum_{i=0}^{k-1}\left(\sqrt[k]{a_n}\right)^i\left(\sqrt[k]{L}\right)^{k-1-i}}\right|=\frac{|a_n-L|}{\sum_{i=0}^{k-1}\left(\sqrt[k]{a_n}\right)^i\left(\sqrt[k]{L}\right)^{k-1-i}}}_{\text{The denominator is always >0}}<\ldots(*)$$

לפי משפט 2, מכך ש- $\lim_{x\to\infty}a_n=L$ מתקיים כי קיים $N_1$ כך שלכל $n>N_1$ מתקיים $0<\frac{L}{2}<a_n\Rightarrow\sqrt[k]{L/2}<\sqrt[k]{a_n}$.

מכאן נקבל כי לכל $n>N_1$:

$$\sum_{i=0}^{k-1}\left(\sqrt[k]{a_n}\right)^i\left(\sqrt[k]{L}\right)^{k-1-i}>\sum_{i=0}^{k-1}\left(\sqrt[k]{L/2}\right)^i\left(\sqrt[k]{L}\right)^{k-1-i}\Rightarrow\frac{1}{\sum_{i=0}^{k-1}\left(\sqrt[k]{a_n}\right)^i\left(\sqrt[k]{L}\right)^{k-1-i}}<\frac{1}{\sum_{i=0}^{k-1}\left(\sqrt[k]{L/2}\right)^i\left(\sqrt[k]{L}\right)^{k-1-i}}$$

כעת, נסמן $M=\sum_{i=0}^{k-1}\left(\sqrt[k]{L/2}\right)^i\left(\sqrt[k]{L}\right)^{k-1-i}$ ונזכר שוב, כי מכך ש- $\lim_{x\to\infty}a_n=L$ מתקיים כי קיים $N_2$ כך שלכל $n>N_2$ מתקיים $|a_n-L|<M\varepsilon$. אם כן, נוכל להמשיך לפתח את האי-שיוויון לעיל ולקבל כי לכל $n>\max\{N_1,N_2\}$:

$$(*)\ldots\underset{\substack{\text{for any}\\ n>N_1}}{<}\frac{|a_n-L|}{\sum_{i=0}^{k-1}\left(\sqrt[k]{L/2}\right)^i\left(\sqrt[k]{L}\right)^{k-1-i}}=\frac{|a_n-L|}{M}\underset{\substack{\text{for any}\\ n>\max\{N_1,N_2\}}}{<}\frac{M\varepsilon}{M}=\varepsilon$$

אם כן קיבלנו כי לכל $\varepsilon>0$ קיים $N=\max\{N_1,N_2\}$ כך שלכל $n>N$ מתקיים כי $\left|\sqrt[k]{a_n}-\sqrt[k]{L}\right|<\varepsilon$.

## תרגיל 1

חשב את $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{4^n+7^n}$.

## פתרון

נסמן $b_n=4^n+7^n$, ונשים לב כי $b_n>0$ לכל $n$.

נראה כי הגבול $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{b_{n-1}}$ קיים וסופי:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{b_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4^n+7^n}{4^{n-1}+7^{n-1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{4^n+7^n}{7^n}}{\frac{4^{n-1}+7^{n-1}}{7^n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{4^n}{7^n}+\frac{7^n}{7^n}}{\frac{4^{n-1}}{7^n}+\frac{7^{n-1}}{7^n}}\right)=\dots$$

$$\dots=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{4^n}{7^n}+1}{\frac{4^{n-1}}{7^{n-1}}\cdot\frac{1}{7}+\frac{7^{n-1}}{7^{n-1}}\cdot\frac{1}{7}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(\frac{4}{7}\right)^n+1}{\left(\frac{4}{7}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{7}+\frac{1}{7}}\right)=\dots$$

כעת, ניזכר כי לכל $c\in\mathbb{R}$ המקיים $c<|1|$ מתקיים כי $\lim_{n\to\infty}c^n=0$ (הוכחה בהמשך). מכאן נסיק כי $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{7}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{7}\right)^{n-1}=0$, ולכן, לפי אריתמטיקה של גבולות, נקבל כי:

$$\dots=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(\frac{4}{7}\right)^n+1}{\left(\frac{4}{7}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{7}+\frac{1}{7}}\right)=\frac{0+1}{0\cdot\frac{1}{7}+\frac{1}{7}}=\frac{1}{\frac{1}{7}}=7$$

אם כן, קיבלנו כי $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{b_{n-1}}=7$, ולכן, לפי משפט 1 לעיל, מתקיים כי $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{4^n+7^n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{b_n}=7$.

## תרגיל 2

חשב את $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2+\sqrt[3]{n}}$.

### פתרון

נסמן $b_n=2+\sqrt[3]{n}$, ונשים לב כי $b_n>0$ לכל $n$.

נראה כי הגבול $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{b_{n-1}}$ קיים וסופי:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2+\sqrt[3]{n}}{2+\sqrt[3]{n-1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{2+\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n}}}{\frac{2+\sqrt[3]{n-1}}{\sqrt[3]{n}}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{2}{\sqrt[3]{n}}+\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n}}}{\frac{2}{\sqrt[3]{n}}+\frac{\sqrt[3]{n-1}}{\sqrt[3]{n}}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[3]{\frac{2^3}{n}}+1}{\sqrt[3]{\frac{2^3}{n}}+\sqrt[3]{\frac{n-1}{n}}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[3]{\frac{2^3}{n}}+1}{\sqrt[3]{\frac{2^3}{n}}+\sqrt[3]{1-\frac{1}{n}}}\right)=\dots$$

כעת נשים לב כי:

- $\frac{2^3}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ לפי משפט על גבול של מכפלת סדרה חסומה וסדרה שואפת לאפס.
- $1-\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ לפי העובדה כי $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ (הוכחה לפי הגדרה) ושימוש באריתמטיקה של גבולות.
- $\sqrt[3]{\frac{2^3}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \sqrt[3]{0}=0$ לפי משפט 5.
- $\sqrt[3]{1-\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \sqrt[3]{1}=1$ לפי משפט 5.

כמו כן, נשים לב כי המכנה לעולם לא מתאפס, ולכן, לפי אריתמטיקה של גבולות וההבחנות לעיל, נקבל כי חשבון הגבול לעיל מניב:

$$\ldots=\frac{0+1}{0+1}=1$$

כלומר $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{b_{n-1}}=1$, ולכן ממשפט 1 נקבל כי $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{b_n}=1=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2+\sqrt[3]{n}}$.

## הגדרה – התכנסות לאינסוף

תהא $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה.

נאמר כי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ שואפת ל- $\infty$ אם לכל $M$ קיים $N$ כך שלכל $n>N$ מתקיים $a_n>M$, ונסמן $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$ או $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$.

נאמר כי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ שואפת ל- $-\infty$ אם לכל $M$ קיים $N$ כך שלכל $n>N$ מתקיים $a_n<M$, ונסמן $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=-\infty$ או $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$.

### הגדרה נוספת שקולה

נאמר כי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ שואפת ל- $\infty$ אם לכל $M>0$ קיים $N$ כך שלכל $n>N$ מתקיים $a_n>M$, ונסמן $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$ או $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$.

נאמר כי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ שואפת ל- $-\infty$ אם לכל $M<0$ קיים $N$ כך שלכל $n>N$ מתקיים $a_n<M$, ונסמן $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=-\infty$ או $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$.

## הגדרה – התכנסות במובן הרחב

תהא $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה.

נאמר כי הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במובן הרחב, אם היא סדרה מתכנסת במובן הרגיל (התכנסות במובן "הצר" - לגבול סופי) או אם היא מתכנסת לפלוס או מינוס אינסוף.

## משפט 6

תהא $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה.

אם $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ אז $\frac{1}{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

### הוכחה

נניח כי $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$.

יהי $\varepsilon < 0$.

נוכיח כי קיים $N$ כך שלכל $n > N$ מתקיים $\left|\frac{1}{a_n} - 0\right| < \varepsilon$.

אם כן, מכך ש- $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ נובע כי קיים $N_1$ כך שלכל $n > N_1$ מתקיים כי $a_n > 0$, כלומר לכל $n > N_1$ מתקיים:

$$\left|\frac{1}{a_n} - 0\right| = \left|\frac{1}{a_n}\right| = \frac{1}{a_n}.$$

נשים לב כי כדי שיתקיים $\frac{1}{a_n} < \varepsilon$ נדרש כי $\frac{1}{\varepsilon} < a_n$. ושוב, משום ש- $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ ניתן לבחור את $N_1$ מחדש כך שלכל $n > N_1$ יתקיים $0 < \frac{1}{\varepsilon} < a_n$. לכן, עבור $N = N_1$ מתקיים כי לכל $n > N$ מתקיים:

$$\left|\frac{1}{a_n} - 0\right| = \frac{1}{a_n} < \frac{1}{1/\varepsilon} = \varepsilon.$$

## משפט 7

תהא $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה כך ש- $a_n \neq 0$ לכל $n$.

אם $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ אז $\frac{1}{|a_n|} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$.

### הוכחה

נניח כי $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

עלינו להראות כי לכל $M>0$ קיים $N$ כך שלכל $n>M$ מתקיים $\frac{1}{|a_n|}>M$.

יהי $M>0$.

מכך ש- $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ נובע כי לכל $\varepsilon>0$ קיים $N_1$ כך שלכל $n>N_1$ מתקיים $|a_n-0|<\varepsilon$, כלומר
$|a_n-0|<\varepsilon \Rightarrow |a_n|<\varepsilon \Rightarrow \frac{1}{|a_n|}>\frac{1}{\varepsilon}$.

לכן, אם נבחר $\varepsilon=\frac{1}{M}$ נקבל כי $M=\frac{1}{1/M}>\frac{1}{|a_n|}$, כלומר $\frac{1}{|a_n|}>M$.

אם כן, הוכחנו כי לכל $M>0$ קיים $N=N_1$ כך שלכל $n>M$ מתקיים $\frac{1}{|a_n|}>M$.

## הגדרה (תזכורת) – סדרות מנוטוניות

תהא $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה.

- אם לכל $n$ מתקיים כי $a_{n+1}>a_n$ אז נאמר כי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה **מונוטונית עולה ממש**.
- אם לכל $n$ מתקיים כי $a_{n+1}\geq a_n$ אז נאמר כי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה **מונוטונית עולה**.
- אם לכל $n$ מתקיים כי $a_{n+1}<a_n$ אז נאמר כי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה **מונוטונית יורדת ממש**.
- אם לכל $n$ מתקיים כי $a_{n+1}\leq a_n$ אז נאמר כי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה **מונוטונית יורדת**.

אם אף אחד מהסעיפים לעיל אינו מתקיים, אז $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ **אינה מונוטונית**.

## משפט 8

כל סדרה מונוטונית וחסומה מתכנסת.

### הוכחה

תהא $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית וחסומה.

נניח ללא הגבלת הכלליות כי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית עולה (ההוכחה עבור המקרה בו $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ **מונוטונית יורדת** הינה **סימטרית**).

אם כן, מכך ש- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה נובע לפי אקסיומת השלמות כי קיים חסם עליון קטן ביותר (כלומר, סופרמום), נסמנו ב- $L$.

נוכיח כי $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, ומכך הסיק כי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת.

אם כן, עלינו להראות כי לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N$ כך שלכל $n > N$ מתקיים $|a_n - L| < \varepsilon$. נראה זאת:

יהי $\varepsilon > 0$.

מכך ש- $L$ הינו הסופרמום של $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ נובע כי קיים $N \in \mathbb{N}$ כך ש- $L - \varepsilon < a_N < L$, משום שאחרת $L$ **לא היה** החסם העליון הקטן ביותר של $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, **בסתירה לכך שהנחנו** שהוא החסם העליון הקטן ביותר.

כמו כן, משום ש- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מנוטונית עולה וחסומה מלעיל ע"י $L$, נובע כי לכל $n > N$ מתקיים כי $L - \varepsilon < a_N < a_n < L < L + \varepsilon$, כלומר $|a_n - L| < \varepsilon$.

## משפט 9

כל סדרה מנוטונית מתכנסת במובן הרחב.

### הוכחה

תהא $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית.

אם $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה, אז היא מתכנסת לפי משפט 8.

על כן, נניח כי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ אינה חסומה, ונניח ללא הגבלת הכלליות כי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית עולה. נוכיח כי $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ (ההוכחה למקרה בו $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית יורדת הינה סימטרית).

אם כן, עלינו להראות כי לכל $M > 0$ קיים $N$ כך שלכל $n > N$ מתקיים $a_n > M$.

יהי $M > 0$.

***הערה:*** *מכך ש- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית עולה, נובע כי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה מלרע (מלמטה) משום ש- $a_1$ הוא המינימום של $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. כלומר, מכך שנתון כי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ אינה חסומה, ומכך שהנחנו כי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מנוטונית עולה, נובע כי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ אינה חסומה מלעיל (מלמעלה).*

מכך ש- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ אינה חסומה, נובע כי קיים $N \in \mathbb{N}$ כך ש- $a_N > M$ (משום שאחרת, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ היתה חסומה מלעיל!). מכך ש- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מנוטונית עולה, נובע כי לכל $n > N$ מתקיים כי $a_n > a_N > M$, ולכן לפי הגדרה נובע כי $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

## תרגיל 3

הוכח לפי הגדרה כי $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+n+1}{n+3}\right)=\infty$.

### פתרון

עלינו להראות כי לכל $M>0$ קיים $N$ כך שלכל $n>N$ מתקיים $\frac{2n^2+n+1}{n+3}>M$.

יהי $M>0$.

$$\frac{2n^2+n+1}{n+3}>\frac{2n^2}{n+3}>\frac{2n^2}{n+3n}=\frac{2n^2}{4n}=\frac{n}{2}.$$

מכאן נקבל כי $\frac{n}{2}>M\Rightarrow n>2M$. כלומר, לכל $M>0$ מצאנו כי עבור $N=2M$ מתקיים כי לכל $n>N$ מתקיים $\frac{2n^2+n+1}{n+3}>M$.

## תרגיל 4

הוכח לפי הגדרה כי $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-1}{1-2n}\right)=\infty$.

### פתרון

עלינו להראות כי לכל $M<0$ קיים $N$ כך שלכל $n>N$ מתקיים $\frac{n^2-1}{1-2n}<M$.

יהי $M<0$.

$$\frac{n^2-1}{1-2n}<\frac{n^2}{1-2n}<\frac{n^2}{-n-2n}=\frac{n^2}{-3n}=-\frac{n}{3}.$$

מכאן נקבל כי $-\frac{n}{3}<M\Rightarrow n>-3M$. כלומר, לכל $M<0$ מצאנו כי עבור $N=-3M$ מתקיים כי לכל $n>N$ מתקיים $\frac{n^2-1}{1-2n}<M$.

## תרגיל 5

הוכח או הפרך:

יהיו $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ו- $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרות.

אם $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ ולכל $n$ מתקיים כי $b_n > 0$ אז $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \infty$.

**פתרון**

הטענה אינה נכונה, נראה דוגמה נגדית.

נבחר $a_n = n$ ו- $b_n = \frac{1}{n^2}$. אז מתקיים כי $a_n \cdot b_n = n \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}$ ומכאן כי $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 0$.

## תרגיל 6

הוכח כי $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\left|\sin\left(n^2+5\right)\right|} = \infty$.

**פתרון**

נגדיר את הסדרה $b_n = \frac{\sin\left(n^2+5\right)}{n}$. מכך ש- $\sin\left(n^2+5\right)$ חסומה ו- $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ נובע לפי משפט על מכפלה של סדרה חסומה וסדרה שואפת לאפס, כי $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\left(n^2+5\right)}{n}\right) = 0$.

כעת, נקבל כי לפי משפט 7 נובע כי $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{|b_n|} = \infty$, אך נשים לב כי:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{|b_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left|\frac{\sin\left(n^2+5\right)}{n}\right|} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{\left|\sin\left(n^2+5\right)\right|}{|n|}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\left|\sin\left(n^2+5\right)\right|}$$

כלומר $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\left|\sin\left(n^2+5\right)\right|} = \infty$.

## הגדרה – סוגי ממוצעים של סדרת איברים

נתונה סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך ש- $a_n > 0$ לכל $n$.

לכל $n$ נגדיר שלושה סוגי ממוצעים, של כל האיברי הסדרה עם אינדקס קטן או שווה ל- $n$:

- ממוצע חשבוני $A_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$
- ממוצע גיאומטרי $G_n = \sqrt{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$

- ממוצע הרמוני $H_n = \dfrac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\ldots+\dfrac{1}{a_n}}$

## משפט 10 – אי-שיוויון הממוצעים (ללא הוכחה)

נתונה סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך ש- $a_n > 0$ לכל $n$. אז מתקיים כי **ממוצע חשבוני** $\geq$ **ממוצע הנדסי** $\geq$ **ממוצע הרמוני**.
כלומר:

$$H_n \leq G_n \leq A_n$$

## תרגיל 7

הוכח כי הסדרה $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{3}{a_n}\right)$, $a_1 = 2$ מתכנסת, וחשב את גבולה.

### פתרון

הסדרה נתונה באמצעות נוסחת נסיגה.

נראה כי הסדרה חסומה ומנוטונית, ונסיק באמצעות משפט 8 כי הסדרה מתכנסת.

<u>אם כן, תחילה **נראה כי הסדרה חסומה** ע"י שימוש באי-שיוויון הממוצעים:</u>

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{3}{a_n}\right) = \frac{a_n + \frac{3}{a_n}}{2} \geq \sqrt{a_n \cdot \frac{3}{a_n}} = \sqrt{3}$$

Inequality of arithmetic and geometric means

אם כן, קיבלנו כי לכל $n$ מתקיים כי $a_n > \sqrt{3}$ ולכן הסדרה חסומה מלרע (מלמטה).

<u>כעת **נראה כי הסדרה מונוטונית יורדת**:</u>

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{3}{a_n}\right) = \frac{a_n + \frac{3}{a_n}}{2} \leq \frac{a_n + \frac{3}{\sqrt{3}}}{2} = \frac{a_n + \sqrt{3}}{2} \leq \frac{a_n + a_n}{2} = a_n$$

. אם כן, קיבלנו כי $a_{n+1} \leq a_n$ ולכן
הסדרה הינה מונוטונית יורדת.

מכאו ניתן להסיק לפי משפט 8 כי הסדרה $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{3}{a_n}\right)$, $a_1 = 2$ מתכנסת, כלומר קיים מספר $L$ כך ש-
$\lim\limits_{x\to\infty} a_n = L$.

<u>כעת **נחשב את גבולה**:</u>

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\left(a_n + \frac{3}{a_n}\right)\right) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} a_n + \frac{3}{\lim_{n\to\infty} a_n}\right) \Rightarrow L = \frac{1}{2}\left(L + \frac{3}{L}\right).$$

נשים לב כי $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$ משום שהסדרה $a_{n+1}$ זהה לסדרה $a_n$ מלבד האיבר הראשון בסדרה שהושמט, ולכן ברור כי הגבול של שתי הסדרות זהה.

אם כן, קיבלנו משוואה ריבועית $L = \frac{1}{2}\left(L + \frac{3}{L}\right)$. נפתור אותה כדי למצוא את הגבול:

$L = \frac{1}{2}\left(L + \frac{3}{L}\right) \Rightarrow 2L = L + \frac{3}{L} \Rightarrow 2L^2 = L^2 + 3 \Rightarrow L^2 = 3 \Rightarrow L = \pm\sqrt{3}$. משום שהסדרה חסומה מלרע ע״י $\sqrt{3}$, האפשרות היחידה הינה כי $L = \sqrt{3}$.