תרגול 3 + 4

הגדרת גבול של סדרה

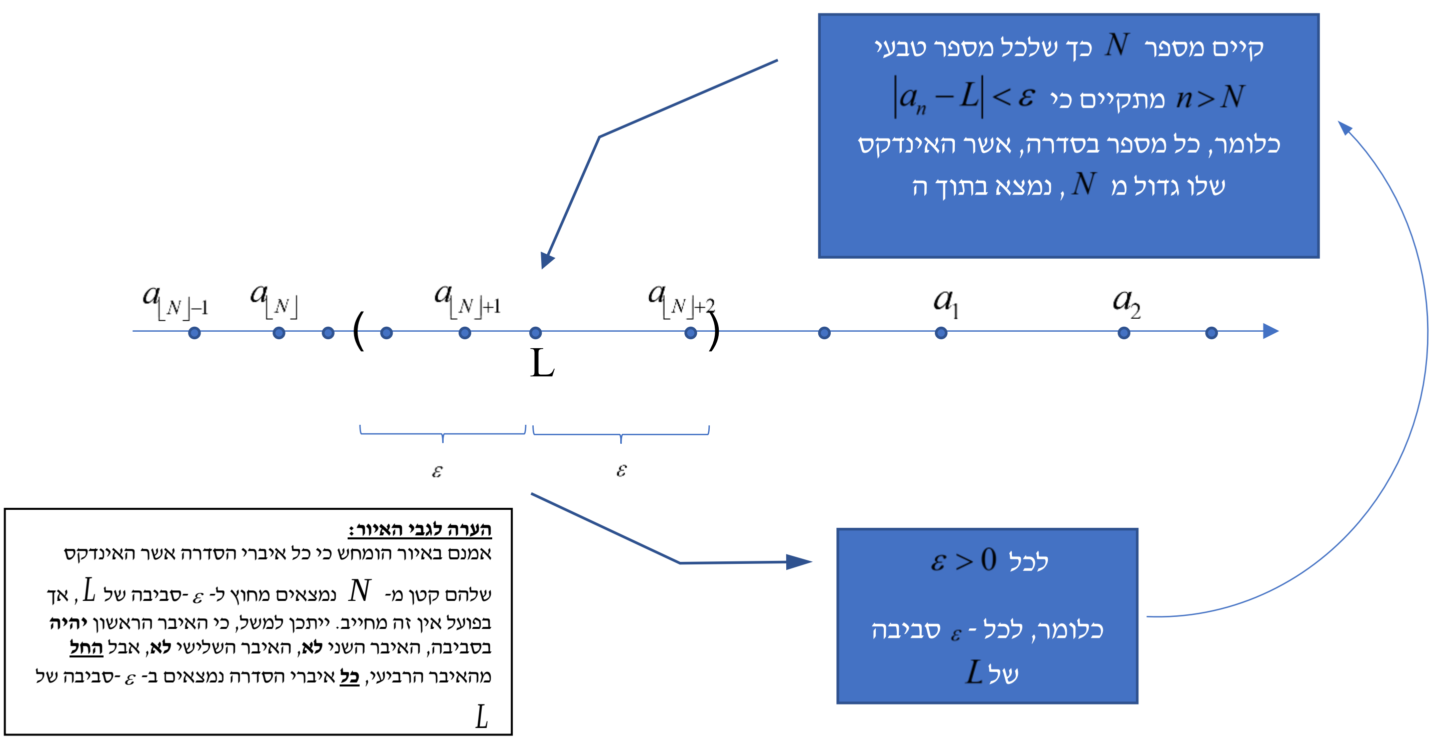
תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה. נאמר שהמספר L הוא **גבול** הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, אם לכל $\varepsilon>0$ קיים מספר N כך שלכל מספר טבעי $n>N$ מתקיים כי $|a_n-L|<\varepsilon$. **סדרה שיש לה גבול סופי נקראת סדרה מתכנסת.**

כדי לבטא את קיום הגבול, נשתמש באחד מהסימונים הבאים:

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$
- $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L$

<u>הערות לגבי הגדרת הגבול:</u>

- יש לשים לב כי בהגדרת הגבול, המספר n משמש כסמן (index) של איברי הסדרה. כלומר הוא משמש כדי לסמן את האיבר במקום ה- n בסדרה. לכן, אנו **<u>דורשים</u>** כי n יהיה מספר **<u>טבעי</u>**. הרי אין משמעות לאיבר ה- 5.5 בסדרה, או לאיבר ה- 6.32 בסדרה. סימון איברי הסדרה הוא תהליך בדיד (discrete). אם כן, משמעות הדרישה $n>N$ היא כי n הינו כל מספר טבעי אשר גדול מ- N. למשל, אם $N=5.5$, אז המספר הטבעי הראשון המקיים $n>N$ הינו $n=6$.
- יש לשים לב כי בהגדרת הגבול, המספר N משמש כסף (threshold), כלומר הגדרת הגבול תקפה לכל איבר a_n בסדרה, אשר הסמן שלו מקיים $n>N$. כלומר, N **<u>איננו</u>** סמן בסדרה. לכן, אנו **<u>לא בהכרח דורשים</u>** מ- N להיות מספר טבעי. המספר N יכול להיות כל מספר אפשרי, אפילו שבר או מספר אי-רציונלי.



תרגיל 1

הוכח לפי הגדרה כי $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{2n-1}\right)=\frac{1}{2}$.

פתרון

יהי $\varepsilon>0$.

עלינו להראות כי קיים מספר N כך שלכל $n>N$ מתקיים $\left|\frac{n+2}{2n-1}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$.

אם כן, נפתח תחילה את הצד השמאלי של אי-השיוויון:

$$\left|\frac{n+2}{2n-1}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{2(n+2)-(2n-1)}{2(2n-1)}\right|=\left|\frac{2n+4-2n+1}{4n-2}\right|=\left|\underbrace{\frac{5}{4n-2}}_{\text{always positive because } n\geq 1}\right|=\frac{5}{4n-2}$$

כעת, אנו רוצים לדעת עבור אילו ערכי n מתקיים כי $\left|\frac{n+2}{2n-1}-\frac{1}{2}\right|=\frac{5}{4n-2}<\varepsilon$ (עבור אפסילון כלשהו). אם כן:

$$\frac{5}{4n-2}<\varepsilon\Rightarrow 5<\varepsilon(4n-2)=4n\varepsilon-2\varepsilon\Rightarrow 5+2\varepsilon<4n\varepsilon\Rightarrow\frac{5+2\varepsilon}{4\varepsilon}<n.$$

אם כן, מצאנו $N=\frac{5+2\varepsilon}{4\varepsilon}$ כך שלכל מספר טבעי n המקיים $n>N$, מתקיים כי $\left|\frac{n+2}{2n-1}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$, ולכן לפי הגדרת הגבול נוכל לכתוב $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{2n-1}\right)=\frac{1}{2}$.

תרגיל 2

הוכח לפי הגדרה כי $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+2n+1}{n^2+n+1}\right)=3$.

פתרון

יהי $\varepsilon>0$.

עלינו להראות כי קיים מספר N כך שלכל $n>N$ מתקיים $\left|\frac{3n^2+2n+1}{n^2+n+1}-3\right|<\varepsilon$.

אם כן, נפתח את הביטוי השמאלי באי-השיוויון:

$$\left|\frac{3n^2+2n+1}{n^2+n+1}-3\right|=\left|\frac{3n^2+2n+1}{n^2+n+1}-3\right|=\left|\frac{3n^2+2n+1-3\left(n^2+n+1\right)}{n^2+n+1}\right|=\left|\frac{3n^2+2n+1-3n^2-3n-3}{n^2+n+1}\right|=\left|\frac{-2-n}{n^2+n+1}\right|=$$

$$=\underbrace{\left|-\frac{2+n}{n^2+n+1}\right|=\left|\frac{2+n}{n^2+n+1}\right|}_{|x|=|-x|}=\frac{2+n}{n^2+n+1}=\frac{2+n}{n^2+n+1}\underset{(*)}{<}\frac{2+n}{n^2}<\frac{2n+n}{n^2}=\frac{3n}{n^2}=\frac{3}{n}$$

כעת אנו נדרוש כי $\frac{3}{n}<\varepsilon$, ונמצא עבור אילו ערכי n זה מתקיים:

$$\frac{3}{n}<\varepsilon\Rightarrow\frac{3}{\varepsilon}<n$$

מכאן כי אם נסמן $N=\frac{3}{\varepsilon}$, אז נקבל כי לכל $N<n$ מתקיים כי $\left|\frac{3n^2+2n+1}{n^2+n+1}-3\right|<\varepsilon$ ולכן לפי הגדרה נובע כי
$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+2n+1}{n^2+n+1}\right)=3$.

<u>הערה:</u>

נשים לב כי במקום המעבר ב- (*) היינו יכולים לבצע מעברים אחרים, פחות הדוקים. למשל:

$\frac{2+n}{n^2+n+1}<\frac{2+n}{n+1}$ (**או אף** $\frac{2+n}{n^2+n+1}<2+n$).

במקרה זה, אם היינו דורשים $\frac{2+n}{n+1}<\varepsilon$ ומנסים לבודד את n, היינו מקבלים:

$$\frac{2+n}{n+1}<\varepsilon\Rightarrow 2+n<\varepsilon\left(n+1\right)\Rightarrow 2+n<\varepsilon n+\varepsilon\Rightarrow n-\varepsilon n<\varepsilon-2\Rightarrow\underbrace{n\left(1-\varepsilon\right)<\varepsilon-2\Rightarrow n<\frac{\varepsilon-2}{1-\varepsilon}}_{\text{when }\varepsilon<1\text{, so }(1-\varepsilon)>0}$$

כלומר, קיבלנו עבור כל $\varepsilon<1$ כי $n<\frac{\varepsilon-2}{1-\varepsilon}$. במילים אחרות, מצאנו חסם עליון על n כתלות ב- ε, ולא חסם תחתון.

כלומר מצאנו כי $\left|\frac{3n^2+2n+1}{n^2+n+1}-3\right|<\varepsilon$ לכל n **<u>עד</u>** ל- $\frac{\varepsilon-2}{1-\varepsilon}$, ולא לכל n **<u>החל</u>** מ- $\frac{\varepsilon-2}{1-\varepsilon}$. כלומר, **<u>לא הצלחנו</u>** להראות לכל $\varepsilon>0$ כי **<u>החל</u>** ממקום מסויים בסדרה, **<u>כל</u>** איברי הסדרה נמצאים בסביבת- ε של 3.

תרגיל 3

הוכח כי $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2001}-\sqrt{n^2+1}\right)=0$.

פתרון

יהי $\varepsilon>0$.

עלינו להראות כי קיים N כך שלכל $n>N$ מתקיים כי $\left|\sqrt{n^2+2001}-\sqrt{n^2+1}-0\right|<\varepsilon$.

<u>הערה:</u> נשתמש בהכפלה בצמוד : $\left(\sqrt{A}+\sqrt{B}\right)\left(\sqrt{A}-\sqrt{B}\right)=A-B$.

אם כן, נפתח את צד שמאל של אי-השיוויון ונקבל:

$$\left|\sqrt{n^2+2001}-\sqrt{n^2+1}-0\right|=\left|\sqrt{n^2+2001}-\sqrt{n^2+1}\right|=\left|\left(\sqrt{n^2+2001}-\sqrt{n^2+1}\right)\cdot\frac{\sqrt{n^2+2001}+\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2+2001}+\sqrt{n^2+1}}\right|=$$

$$=\left|\frac{n^2+2001-\left(n^2+1\right)}{\sqrt{n^2+2001}+\sqrt{n^2+1}}\right|=\left|\frac{2000}{\sqrt{n^2+2001}+\sqrt{n^2+1}}\right|<\left|\frac{2000}{\sqrt{n^2+1}}\right|\underset{\substack{\text{square-root is an}\\\text{increasing monotonic}\\\text{function}}}{<}\left|\frac{2000}{\sqrt{n^2}}\right|=\left|\frac{2000}{n}\right|\underset{n\geq 1}{=}\frac{2000}{n}$$

כעת נדרוש כי $\frac{2000}{n}<\varepsilon$, ונקבל כי $n>\frac{2000}{\varepsilon}$.

כלומר, עבור $N=\frac{2000}{\varepsilon}$ נקבל כי לכל $n>N$ מתקיים כי $\left|\sqrt{n^2+2001}-\sqrt{n^2+1}-0\right|<\varepsilon$, ולכן

$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2001}-\sqrt{n^2+1}\right)=0$.

תרגיל 4 - שלילת קיום גבול

כאשר אנו רוצים להוכיח קיום גבול L עבור סדרה a_n (כלומר להוכיח כי הסדרה מתכנסת), עלינו להראות כי:

<u>לכל</u> $\varepsilon>0$ **<u>קיים</u>** מספר N כך **<u>שלכל</u>** מספר טבעי $n>N$ מתקיים כי $|a_n-L|<\varepsilon$.

כאשר אנו רוצים להראות אי קיום גבול, עלינו להראות כי הגדרת הגבול אינה מתקיימת. כלומר, עלינו למצוא $\varepsilon>0$ כלשהו עבורו תנאי ההגדרה אינם מתקיימים:

<u>קיים</u> $\varepsilon>0$ כך **<u>שלכל</u>** מספר N **<u>קיים</u>** $n>N$ כך שמתקיים $|a_n-L|\geq\varepsilon$.

דוגמה

נוכיח כי הסדרה $a_n=2n+1$ אינה מתכנסת (כלומר לא קיים לה גבול סופי).

פתרון

נניח **<u>בשלילה</u>** כי הסדרה $a_n=2n+1$ מתכנסת, כלומר קיים מספר L כך ש- $\lim\limits_{n\to\infty}(2n+1)=L$. נראה כי קיים **<u>קיים</u>** $\varepsilon>0$ כך **<u>שלכל</u>** מספר N **<u>קיים</u>** $n>N$ כך שמתקיים $|2n+1-L|\geq\varepsilon$.

אם כן, תחילה נבחין כי לכל $n\geq\frac{L}{2}$ מתקיים:

$$\underbrace{|2n+1-L|\geq\left|2\cdot\frac{L}{2}+1-L\right|}_{\text{for } n\geq\frac{L}{2}}=|L+1-L|=|1|=1$$

כלומר $|2n+1-L|\geq1$ לכל $n\geq\frac{L}{2}$.

נבחר $\varepsilon=1$. עבור בחירה זו, עלינו להראות כי הגדרת הגבול **<u>אינה</u>** מתקיימת **<u>לכל</u>** N. אם כן, נראה כי אכן **לכל** N **קיים** $n>N$ כך ש- $|2n+1-L|\geq1$. נפריד לשני מקרים משלימים:

- **עבור** $N\geq\frac{L}{2}$:

כאן אנו מתייחסים למקרים בהם $N\geq\frac{L}{2}$. במקרים אלו נוכל לבחור כל n המקיים $n>N$ משום שאז הוא גם יקיים $n>N\geq\frac{L}{2}$, ולכן נקבל כי $|2n+1-L|\geq1$ (לפי ההבחנה לעיל).

- **עבור** $N < \frac{L}{2}$:

כאן אנו מתייחסים למקרים בהם $N < \frac{L}{2}$. במקרים אלו נוכל לבחור כל n המקיים $n > \frac{L}{2}$, משום שאז הוא גם יקיים כי $n > \frac{L}{2} > N$ ולכן נקבל כי $|2n+1-L| \geq 1$ **(שוב, לפי ההבחנה לעיל)**.

מכאן כי <u>**עבור**</u> $\varepsilon = 1$ מצאנו כי <u>**לכל**</u> מספר N <u>**קיים**</u> $n > N$ כך שמתקיים $|a_n - L| \geq \varepsilon$. לכן, הסדרה $a_n = 2n+1$ אינה מתכנסת, כלומר לא קיים לה גבול סופי.

משפט 1 – סדרה מתכנסת היא סדרה חסומה

כל סדרה מתכנסת היא חסומה.

הוכחה

<u>תזכורת:</u>

סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה אם קיים $M>0$ כך שלכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים כי $|a_n|\le M$. כלומר $-M\le a_n\le M$.

<u>תזכורת:</u>

קבוצה/סדרה סופית של מספרים היא חסומה.

<u>תחילת הוכחה:</u>

אם כן, תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתכנסת, כלומר $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=L$. לכן, עבור $\varepsilon>0$ קיים N כך שלכל $n>N$ מתקיים $|a_n-L|<\varepsilon$, כלומר $-\varepsilon<a_n-L<\varepsilon\Rightarrow-\varepsilon+L<a_n<\varepsilon+L$.

כעת, נבחן את קבוצת האיברים בעלי אינדקס $n\le N$. זוהי סדרה **<u>סופית</u>** של איברים, ולכן סדרה זו חסומה. כלומר, קיים $M>0$ כך שלכל $n\le N$ מתקיים כי $|a_n|\le M\Rightarrow-M\le a_n\le M$.

כעת, נסמן $M_{\min}=\min\{-\varepsilon+L,-M\}$ ו- $M_{\max}=\max\{\varepsilon+L,M\}$, ונקבל כי:

- $M_{\min}\le-\varepsilon+L<a_n<\varepsilon+L\le M_{\max}$ לכל $n>N$.
- $M_{\min}\le-M\le a_n\le M\le M_{\max}$ לכל $n\le N$.

אם כן, קיבלנו כי לכל n מתקיים $M_{\min}<a_n<M_{\max}$ ולכן הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה.

משפט 2 – גבול מכפלת סדרה חסומה וסדרה שואפת לאפס

תהי $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה חסומה, ותהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתכנסת שואפת לאפס, כלומר $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. אז מתקיים כי $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

הוכחה

יהי $\varepsilon > 0$.

עלינו להוכיח כי קיים N כך שלכל $n > N$ מתקיים כי $\underset{(1)}{|a_n b_n - 0| < \varepsilon}$.

נתון כי $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה, ולכן קיים $M > 0$ כך ש- $\underset{(2)}{|b_n| < M}$. כמו כן, נתון כי $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ לכן לכל $\hat{\varepsilon}$ קיים $\hat{N}$ כך שלכל $n > \hat{N}$ מתקיים כי $\underset{(3)}{|a_n - 0| < \hat{\varepsilon}}$. אם כן, נפתח מעט את ביטוי (1), כדי לקבל כי לכל $n > N = \hat{N}$ מתקיים:

$$|a_n b_n - 0| = |a_n b_n| = \underset{(4)}{|a_n||b_n| < \hat{\varepsilon} M}$$

כעת, נבחר $\hat{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{M}$, ונציב חזרה ב- (4) כדי לקבל כי לכל $n > N = \hat{N}$ מתקיים:

$$|a_n b_n - 0| < \hat{\varepsilon} M = \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon$$
כלומר, $|a_n b_n - 0| < \varepsilon$.

דוגמה

חשב את $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{7}{n^2}\right)$.

פתרון

נשים לב כי הביטוי $\frac{7}{n^2}$ מורכב ממכפלה של שתי סדרות $a_n = 7$ ו- $b_n = \frac{1}{n^2}$. הסדרה $a_n = 7$ היא סדרה קבועה (כל איבריה הם 7) ולכן חסומה, והסדרה $b_n = \frac{1}{n^2}$ היא סדרה שואפת לאפס. לכן,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{7}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(7 \cdot \frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = 0.$$

משפט 3 – אריתמטיקה של גבולות

יהיו $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ו- $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרות מתכנסות, כלומר $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ ו- $\lim_{n\to\infty} b_n = B$. אזי:

א. לכל קבוע c מתקיים כי $\lim_{n\to\infty}(ca_n) = c\cdot\lim_{n\to\infty} a_n = cA$.

ב. $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = A+B$.

ג. $\lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = A\cdot B$.

ד. אם בנוסף מתקיים כי $B\neq 0$ וכן כי לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים כי $b_n\neq 0$, אזי:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{A}{B}$$

הוכחה

סעיף א

יהי $\varepsilon > 0$.

אנו רוצים להוכיח כי קיים N כך שלכל $n > N$ מתקיים כי $\underbrace{|ca_n - cA| < \varepsilon}_{(1)}$.

תחילה, מכך שנתון כי $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, אז לפי הגדרת הגבול נובע כי עבור $\hat{\varepsilon}$ מסויים (אותו אנחנו יכולים לבחור בהמשך באופן ספציפי לצרכינו) קיים $\hat{N}$ כך שלכל $n > \hat{N}$ מתקיים כי $\underbrace{|a_n - A| < \hat{\varepsilon}}_{(2)}$. כעת נחזור לביטוי (1) ונעשה שימוש ב- (2):

$$|ca_n - cA| = |c(a_n - A)| = \underbrace{|c|\cdot|a_n - A| < |c|\cdot\hat{\varepsilon}}_{\text{for any } n>\hat{N}\text{, according to } (2)} = \underbrace{|c|\cdot\frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon}_{\substack{\text{we are free}\\ \text{to set } \hat{\varepsilon}=\frac{\varepsilon}{|c|}}}.$$

על פניו נראה שסיימנו.

הנחנו כי נתון $\varepsilon > 0$ כלשהו, והראינו כי קיים $N = \hat{N}$ כך שלכל $n > N$ מתקיים כי $|ca_n - cA| < \varepsilon$. עם זאת, נותר מקרה קצה שלא טיפלנו בו, מה אם $c = 0$?

על כן, נבצע הפרדה לשני מקרים. ההוכחה לעיל נכונה עבור המקרה בו $c\neq 0$. ההוכחה עבור המקרה בו $c = 0$ הינה פשוטה:

$$\lim_{n\to\infty}(0\cdot a_n) = \lim_{n\to\infty}(0) = 0 = 0\cdot A.$$

סעיף ב

יהי $\varepsilon > 0$.

אנו רוצים להוכיח כי קיים N כך שלכל $n>N$ מתקיים כי $\underbrace{\left|\left(a_n+b_n\right)-\left(A+B\right)\right|<\varepsilon}_{(1)}$.

תחילה,

מכך שנתון כי $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, אז לפי הגדרת הגבול נובע כי עבור $\hat{\varepsilon}_A$ מסויים (אותו אנחנו יכולים לבחור בהמשך באופן ספציפי לצרכינו) קיים $\hat{N}_A$ כך שלכל $n>\hat{N}_A$ מתקיים כי $\underbrace{\left|a_n-A\right|<\hat{\varepsilon}_A}_{(2)}$.

כמו כן, מכך שנתון כי $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$, אז לפי הגדרת הגבול נובע כי עבור $\hat{\varepsilon}_B$ מסויים (אותו אנחנו יכולים לבחור בהמשך באופן ספציפי לצרכינו) קיים $\hat{N}_B$ כך שלכל $n>\hat{N}_B$ מתקיים כי $\underbrace{\left|b_n-B\right|<\hat{\varepsilon}_B}_{(3)}$.

כעת נחזור לביטוי (1) ונעשה שימוש ב- (2) ו- (3) תחת הנחה כי $n>\max\left\{N_A,N_B\right\}$:

$$\underbrace{\left|\left(a_n+b_n\right)-\left(A+B\right)\right| = \underbrace{\left|\left(a_n-A\right)+\left(b_n-B\right)\right| \le \left|a_n-A\right|+\left|b_n-B\right|}_{\text{Triangle inequality}} < \underbrace{\hat{\varepsilon}_A+\hat{\varepsilon}_B = \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}}_{\substack{\text{we are free to} \\ \text{set } \hat{\varepsilon}_A=\frac{\varepsilon}{2} \text{ and } \hat{\varepsilon}_B=\frac{\varepsilon}{2}}} = \varepsilon}_{(4)}$$

יש לשים לב כי האי-שיוויון (4) לעיל נכון רק עבור $n>N=\max\left\{N_A,N_B\right\}$, אך זה בדיוק מה שאנו מחפשים כדי להשלים את ההוכחה – כלומר, מצאנו כי עבור $\varepsilon>0$, קיים $N=\max\left\{N_A,N_B\right\}$, כך שלכל $n>N$ מתקיים $\left|\left(a_n+b_n\right)-\left(A+B\right)\right|<\varepsilon$. מכאן כי לפי הגדרת הגבול מתקיים כי $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n+b_n\right)=A+B$.

סעיף ג

יהי $\varepsilon>0$.

אנו רוצים להוכיח כי קיים N כך שלכל $n>N$ מתקיים כי $\underbrace{\left|a_n\cdot b_n-A\cdot B\right|<\varepsilon}_{(1)}$.

תחילה,

מכך שנתון כי $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, אז לפי הגדרת הגבול נובע כי עבור $\hat{\varepsilon}_A$ מסויים (אותו אנחנו יכולים לבחור בהמשך באופן ספציפי לצרכינו) קיים $\hat{N}_A$ כך שלכל $n>\hat{N}_A$ מתקיים כי $\underbrace{\left|a_n-A\right|<\hat{\varepsilon}_A}_{(2)}$.

כמו כן, מכך שנתון כי $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$, אז לפי הגדרת הגבול נובע כי עבור $\hat{\varepsilon}_B$ מסויים (אותו אנחנו יכולים לבחור בהמשך באופן ספציפי לצרכינו) קיים $\hat{N}_B$ כך שלכל $n>\hat{N}_B$ מתקיים כי $\underbrace{\left|b_n-B\right|<\hat{\varepsilon}_B}_{(3)}$.

כעת נחזור לביטוי (1) ונעשה שימוש ב- (2) ו- (3) תחת הנחה כי $n>\max\left\{N_A,N_B\right\}$:

$$\underbrace{\left|a_n\cdot b_n-A\cdot B\right|=\left|a_nb_n-a_nB+a_nB-AB\right|}_{\text{add and subtract }a_nB}=\underbrace{\left|a_n\left(b_n-B\right)+\left(a_n-A\right)B\right|\le\left|a_n\left(b_n-B\right)\right|+\left|\left(a_n-A\right)B\right|}_{\text{triangle inequality}}=$$
$$=\underbrace{\left|a_n\right|\cdot\left|\left(b_n-B\right)\right|+\left|\left(a_n-A\right)\right|\cdot\left|B\right|<\left|a_n\right|\cdot\hat{\varepsilon}_B+\hat{\varepsilon}_A\cdot\left|B\right|}_{\text{using (2) and (3)}} \tag{4}$$

כעת נשאלת השאלה כיצד לבחור את $\hat{\varepsilon}_A$ ו- $\hat{\varepsilon}_B$ כדי שנוכל לקבל אי-שיוויון קטן ממש מ- ε. יש לשים לב כי $\left|a_n\right|$ אינו קבוע, הוא תלוי בערכו של איבר בסדרה. כאן יש לזכור משפט חשוב – סדרה מתכנסת (כלומר, סדרה שיש לה גבול סופי) היא סדרה חסומה. כלומר קיים $M>0$ כך שמתקיים כי $\left|a_n\right|<M$. כעת, נוכל לבחור $\hat{\varepsilon}_B=\dfrac{\varepsilon}{2M}$. כמו כן, משום ש- B הינו קבוע, על פניו נראה כי ניתן לבחור $\hat{\varepsilon}_A=\dfrac{\varepsilon}{2\left|B\right|}$ בדומה לסעיפים הקודמים. אך ייתכן כי $B=0$. על כן, אם נבחר את M כך שיתקיים כי $M>\left|B\right|$ (תמיד ניתן לעשות זאת,כלומר, משום ש- $\left\{a_n\right\}$ חסומה, תמיד נוכל לבחור $M>0$ כדשגם יהווה חסם ל- $\left\{a_n\right\}$ וגם יקיים $M>\left|B\right|$). כעת, נוכל לבחור $\hat{\varepsilon}_B=\hat{\varepsilon}_A=\dfrac{\varepsilon}{2M}$. נותר להציב חזרה באי-שיוויון (4) לעיל, ולקבל:

$$\left|a_n\cdot b_n-A\cdot B\right|<\left|a_n\right|\cdot\hat{\varepsilon}_B+\hat{\varepsilon}_A\cdot\left|B\right|<M\cdot\hat{\varepsilon}_B+\hat{\varepsilon}_A\cdot M=M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}+\frac{\varepsilon}{2M}\cdot M=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

לסיכום, מצאנו כי לכל $\varepsilon>0$ קיים $N=\max\left\{N_A,N_B\right\}$ כך שלכל $n>N$ מתקיים כי $\left|a_n\cdot b_n-A\cdot B\right|<\varepsilon$ ומכאן כי $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n\cdot b_n\right)=A\cdot B$.

סעיף ד

בסעיף זה נתון כי $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ ו- $\left\{b_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ סדרות מתכנסות, כלומר $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$ ו- $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B$, וכן כי $B\neq 0$ וגם כי לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $b_n\neq 0$.

עלינו להוכיח כי $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}=\dfrac{A}{B}$.

<u>**תחילת ההוכחה:**</u>

יהי $\varepsilon>0$.

עלינו להוכיח כי קיים N כך שלכל $n>N$ מתקיים $\left|\dfrac{a_n}{b_n}-\dfrac{A}{B}\right|<\varepsilon$ (1). נפתח את אי-שיוויון (1), ונקבל:

$$\left|\frac{a_n}{b_n}-\frac{A}{B}\right| = \left|\frac{a_nB-Ab_n}{b_nB}\right| = \left|\frac{a_nB-AB+AB-Ab_n}{b_nB}\right| = \left|\frac{(a_n-A)B+A(B-b_n)}{b_nB}\right| =$$

$$= \frac{\left|(a_n-A)B+A(B-b_n)\right|}{|b_nB|} \underset{(2)}{\le} \frac{\left|(a_n-A)B\right|+\left|A(B-b_n)\right|}{|b_nB|} = \frac{|a_n-A||B|+|A||B-b_n|}{|b_n||B|} = \frac{|a_n-A||B|+|A||b_n-B|}{|b_n||B|}$$

כעת נשתמש בנתונים:

מכך שנתון כי $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, אז לפי הגדרת הגבול נובע כי עבור $\hat{\varepsilon}_A$ מסויים (אותו אנחנו יכולים לבחור בהמשך באופן ספציפי לצרכינו) קיים $\hat{N}_A$ כך שלכל $n > \hat{N}_A$ מתקיים כי $\underset{(3)}{|a_n - A| < \hat{\varepsilon}_A}$.

כמו כן, מכך שנתון כי $\lim_{n\to\infty} b_n = B$, אז לפי הגדרת הגבול נובע כי עבור $\hat{\varepsilon}_B$ מסויים (אותו אנחנו יכולים לבחור בהמשך באופן ספציפי לצרכינו) קיים $\hat{N}_B$ כך שלכל $n > \hat{N}_B$ מתקיים כי $\underset{(4)}{|b_n - B| < \hat{\varepsilon}_B}$.

כמובן, שבדומה לסעיפים הקודמים, נוכל לבחור את $\hat{\varepsilon}_A$ ו- $\hat{\varepsilon}_B$ כך שהפקטורים $|A|$ ו- $|B|$ יתבטלו. השאלה כיצד נצליח לבטל את החלוקה ב- $|b_n|$. נשים לב כי הסדרה $\{b_n\}$ חסומה, משום שהיא מתכנסת. לכן, קיים $M>0$ כך ש- $|b_n| < M$. עובדה זו לא עוזרת לנו, משום שאנחנו מעוניינים למעשה לחסום את $\frac{1}{|b_n|}$, אך $|b_n| < M \Rightarrow \frac{1}{|b_n|} > \frac{1}{M}$

כלומר אנחנו מקבלים חסם על $\frac{1}{|b_n|}$ בכיוון הלא נכון.

כדי למצוא חסם מתאים, נשים לב לעובדות הבאות:

- מכך ש- $\{b_n\}$ מתכנסת, אז גם $\{|b_n|\}$ מתכנסת (משפט שהוכח לעיל).
- מכך ש- $\{|b_n|\}$ מתכנסת נובע כי היא חסומה.
- מתקיים כי $|b_n| > 0$ (משום ש- $b_n \neq 0$ לכל n).

משלושת הנקודות לעיל נובע כי קיימים $M, K > 0$ כך ש- $\underset{(5)}{0 < K \le |b_n| \le M \Rightarrow 0 < \frac{1}{M} \le \frac{1}{|b_n|} \le \frac{1}{K}}$.

כעת, נציב את התוצאות שקיבלנו ב $(3),(4),(5)$ חזרה ב- (2) ונקבל כי מתקיים לכל $n > N = \max\{\hat{N}_A, \hat{N}_B\}$:

$$\underset{(6)}{\left|\frac{a_n}{b_n}-\frac{A}{B}\right| \le \frac{\hat{\varepsilon}_A|B|+|A|\hat{\varepsilon}_B}{M|B|} = \frac{\hat{\varepsilon}_A|B|}{M|B|}+\frac{|A|\hat{\varepsilon}_B}{M|B|} = \frac{\hat{\varepsilon}_A}{M}+\frac{|A|\hat{\varepsilon}_B}{M|B|} = \frac{1}{M}\hat{\varepsilon}_A+\frac{|A|}{M|B|}\hat{\varepsilon}_B}$$

בשלב זה אנו נתפתה לבחור $\hat{\varepsilon}_A = \dfrac{\varepsilon M}{2}$ ו- $\hat{\varepsilon}_B = \dfrac{\varepsilon |B| M}{2|A|}$, אך ייתכן כי $A=0$. עם זאת, תמיד ניתן לבחור $\hat{M} > |A| \geq 0$. נציב חזרה ב- (6) ונקבל כי מתקיים לכל $n > N = \max\left\{\hat{N}_A, \hat{N}_B\right\}$:

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B}\right| < \frac{1}{M}\hat{\varepsilon}_A + \frac{|A|}{M|B|}\hat{\varepsilon}_B \underset{(7)}{<} \frac{1}{M}\hat{\varepsilon}_A + \frac{\hat{M}}{M|B|}\hat{\varepsilon}_B .$$

כעת נבחר $\hat{\varepsilon}_B = \dfrac{\varepsilon |B| M}{2\hat{M}}$, ונציב חזרה ב- (7) ונקבל כי מתקיים לכל $n > N = \max\left\{\hat{N}_A, \hat{N}_B\right\}$:

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B}\right| < \frac{1}{M}\hat{\varepsilon}_A + \frac{\hat{M}}{M|B|}\hat{\varepsilon}_B = \frac{1}{M}\cdot\frac{\varepsilon M}{2} + \frac{\hat{M}}{M|B|}\cdot\frac{\varepsilon|B|M}{2\hat{M}} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

דוגמאות

דוגמא 1

חשב את $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2+4n+2}{5n^2+1}\right)$.

פתרון

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+4n+2}{5n^2+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{3n^2+4n+2}{n^2}}{\frac{5n^2+1}{n^2}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3+\frac{4}{n}+\frac{2}{n^2}}{5+\frac{1}{n^2}}\right) = \dots$$

כעת נשים לב כי הסדרות שקיבלנו במונה ובמכנה הן סדרות מתכנסות, משום ש- $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{c}{n^k} = 0$ לכל $c,k\in\mathbb{R}$. כמו כן, המכנה לעולם לא מתאפס. כלומר, ניתן להשתמש במנה וסכום של גבולות, ולקבל:

$$\dots = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{4}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(5+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(3)+\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4}{n}\right)+\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}(5)+\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{3+0+0}{5+0} = \frac{3}{5}$$

דוגמא 2

חשב את $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2}+\dots+\dfrac{n}{n^2+100}\right)$.

פתרון

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+\ldots+\frac{n}{n^2+100}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{n}{n^2}}{\frac{n^2+1}{n^2}}+\frac{\frac{n}{n^2}}{\frac{n^2+2}{n^2}}+\ldots+\frac{\frac{n}{n^2}}{\frac{n^2+100}{n^2}}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}+\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n^2}}+\ldots+\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{100}{n^2}}\right)=\ldots$$

כעת, נשים לב שוב כי הסדרות שקיבלנו במונה ובמכנה של **כל מחובר** הן סדרות מתכנסות, משום ש- $\lim_{n\to\infty}\frac{c}{n^k}=0$ לכל $c,k\in\mathbb{R}$. כמו כן, המכנה של **כל מחובר** לעולם לא מתאפס. לכן, ע״י שימוש במנה של גבולות, גם **כל מחובר** הוא סדרה מתכנסת. כלומר, ניתן להשתמש שוב בסכום של גבולות, ולקבל:

$$\ldots=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}+\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n^2}}+\ldots+\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{100}{n^2}}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}\right)+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n^2}}\right)+\ldots+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{100}{n^2}}\right)=$$

$$=\frac{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}+\frac{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n^2}\right)}+\ldots+\frac{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{100}{n^2}\right)}=$$

$$=\frac{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)}{\lim_{n\to\infty}(1)+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)}+\frac{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)}{\lim_{n\to\infty}(1)+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n^2}\right)}+\ldots+\frac{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)}{\lim_{n\to\infty}(1)+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{100}{n^2}\right)}=$$

$$=\frac{0}{1+0}+\frac{0}{1+0}+\ldots+\frac{0}{1+0}=0$$

משפט 4 – כלל הסנדוויץ'

יהיו $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}, \{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ שלוש סדרות. אם $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$, ואם קיים $\hat{N}$ כך שלכל $n > \hat{N}$ מתקיים כי $\underset{(1)}{a_n \le b_n \le c_n}$ אז מתקיים כי $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.

הוכחה

יהי $\varepsilon > 0$.

מכך שנתון כי $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, אז לפי הגדרת הגבול, נובע כי עבור ε שניתן לעיל, קיים $\hat{N}_a$ כך שלכל $n > \hat{N}_a$ מתקיים כי $|a_n - L| < \varepsilon \Rightarrow \underset{(2)}{-\varepsilon < a_n - L < \varepsilon} \Rightarrow -\varepsilon + L < a_n < \varepsilon + L$.

מכך שנתון כי $\lim_{n\to\infty} c_n = L$, אז לפי הגדרת הגבול, נובע כי עבור ε שניתן לעיל, קיים $\hat{N}_c$ כך שלכל $n > \hat{N}_c$ מתקיים כי $|c_n - L| < \varepsilon \Rightarrow \underset{(3)}{-\varepsilon < c_n - L < \varepsilon} \Rightarrow -\varepsilon + L < c_n < \varepsilon + L$.

נשתמש ב- $(1),(2),(3)$ כדי להסיק כי לכל $n > N = \max\{\hat{N}_a, \hat{N}_c, \hat{N}\}$ מתקיים:

$$-\varepsilon + L < a_n \le b_n \le c_n < \varepsilon + L \Rightarrow -\varepsilon + L < b_n < \varepsilon + L \Rightarrow -\varepsilon < b_n - L < \varepsilon \Rightarrow |b_n - L| < \varepsilon$$

ומכאן כי $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.

דוגמאות

דוגמה 1

חשב את $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n}\right)$.

פתרון

נסמן $b_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n}$

נזכור כי בשבר, ככול שהמכנה גדול יותר כך המנה קטנה יותר, ולכן:

$$n \cdot \frac{n}{n^2+n} = \frac{n}{n^2+n} + \frac{n}{n^2+n} + \ldots + \frac{n}{n^2+n} \le b_n \le \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+1} + \ldots + \frac{n}{n^2+1} = n \cdot \frac{n}{n^2+1}$$

כלומר:

$$n \cdot \frac{n}{n^2+n} \le b_n \le n \cdot \frac{n}{n^2+1}$$

כעת נסמן $c_n = n\cdot\frac{n}{n^2+1}$ ו- $a_n = n\cdot\frac{n}{n^2+n}$. קל לראות כי לפי אריתמטיקת גבולות מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n)=\lim_{n\to\infty}(c_n)=1$$

ולכן ממשפט הסנדוויץ' נקבל כי $\lim_{n\to\infty}(b_n)=1$ $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+\ldots+\frac{n}{n^2+n}\right)=\lim_{n\to\infty}(b_n)=1$

דוגמא 2

חשב את $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n!}{n^n}\right)$

פתרון

כדי לקבל תחושה איך איברי הסדרה מתנהגים, נחשב את ארבעת האיברים הראשונים של הסדרה:

$$a_1=\frac{1!}{1^1}=\frac{1}{1}=1\le\frac{1}{1}$$
$$a_2=\frac{2!}{2^2}=\frac{2\cdot1}{2\cdot2}=\frac{1}{2}\le\frac{1}{2}$$
$$a_3=\frac{3!}{3^3}=\frac{3\cdot2\cdot1}{3\cdot3\cdot3}=\frac{2\cdot1}{3\cdot3}=\frac{2}{9}\le\frac{1}{3}$$
$$a_4=\frac{4!}{4^4}=\frac{4\cdot3\cdot2\cdot1}{4\cdot4\cdot4\cdot4}=\frac{3\cdot1}{4\cdot2\cdot4}=\frac{3}{32}\le\frac{1}{4}$$

כלומר נדמה כי $\frac{n!}{n^n}\le\frac{1}{n}$ לכל $n\ge1$. נוכיח זאת:

$$\frac{n!}{n^n}\le\frac{1}{n}\Rightarrow n\cdot n!\le n^n\Rightarrow n!\le n^{n-1}\Rightarrow n!\le n^{n-1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-(n-2))}_{\text{n-1 factors}}\cdot1\le\underbrace{n\cdot n\cdot\ldots\cdot n}_{n-1\text{ times}}\Rightarrow \underbrace{\frac{n}{n}\cdot\underbrace{\frac{(n-1)}{n}}_{\le1}\cdot\underbrace{\frac{(n-2)}{n}}_{\le1}\cdot\ldots\cdot\underbrace{\frac{(n-(n-2))}{n}}_{\le1}\le1}_{\text{TRUE}}$$

נשים לב כי ההוכחה הזו, בכיוון שבה התבצעה (משמאל לימין), אינה מוכיחה למעשה שום דבר. משום שיצאנו מהטיעון אותו רצינו להוכיח, עד שהגענו לטיעון שאנו יודעים שהוא ביטוי אמת. לכן, כיוון ההוכחה האמיתי הינו מהסוף להתחלה, כלומר מימין לשמאל. כמובן שאין ביכולתנו לנבא מראש באיזה אמיתה עלינו להשתמש כדי להוכיח את הטיעון המקורי, ולכן, זה "בסדר" להתחיל מהטיעון אותנו אנו רוצים להוכיח ולהגיע לביטוי שהוא אמת, **אך עלינו לוודא כי ההוכחה עובדת בשני הכיוונים!**

במקרה לעיל, כמובן שההוכלה עובדת גם בכיוון ההפוך, משום שאפשר לבצע בכל שלב את הפעולה ההפוכה שביצענו בכיוון הנגדי.

אם כן, הוכחנו כי $\frac{n!}{n^n}\le\frac{1}{n}$.

כמו כן, ברור גם כי $0 \le \frac{n!}{n^n}$, משום ש- $n \ge 1$.

אם כן, מצאנו כי לכל $n \ge 1$ מתקיים:

$$0 \le \frac{n!}{n^n} \le \frac{1}{n}.$$

משום ש- $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ ו- $\lim_{n\to\infty}(0) = 0$, נובע ממשפט הסנדוויץ' כי $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n!}{n^n}\right) = 0$.