תרגול 2

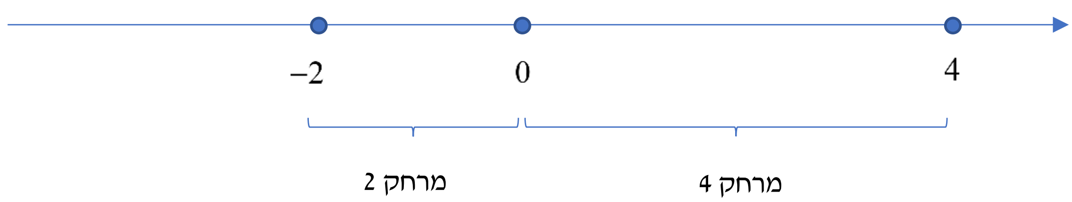
ערך מוחלט

הגדרה

יהא $x\in\mathbb{R}$. הערך המוחלט של x מוגדר ע"י $|x|=\begin{cases} x & x\ge 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$. ניתן גם להגדיר את הערך המוחלט באופן הבא $|x|=\max(-x,x)$.

פירוש גיאומטרי

יהא $x\in\mathbb{R}$. הערך $|x|$ מבטא את המרחק בין x ל- 0.



כמו כן, עבור $y\in\mathbb{R}$, נקבל כי $|x-y|$ מבטא את המרחק בין x ו- y.

אי-שיוויונות וערך מוחלט

נתון האי-שיוויון $|x|<a$ עבור $0<a\in\mathbb{R}$ קבוע כלשהו. לפי הגדרת הערך המוחלט, קבוצת הפתרונות של האי-שיוויון היא כל ה- x-ים אשר מרחקם מאפס קטן מ- a.

מכאן כי אנו מחפשים את כל ה- x-ים המקיימים $-a<x<a$. כלומר קיבלנו $-a<x<a \Leftrightarrow |x|<a$.

תרגיל 1

פתרו את אי-השיוויון הבא:

$$\left|\frac{2}{x}-5\right|<1.$$

פתרון

לפי הגדרה, עלינו לפתור את אי-השיוויון הבא:

$$-1<\frac{2}{x}-5<1.$$

דרך א'

גישה אפשרית, היא להבחין כי הביטוי $-1<\frac{2}{x}-5<1$ מכיל שני אי-שיוויונות. נפרדים $-1<\frac{2}{x}-5$ ו- $\frac{2}{x}-5<1$.

המשמעות כי מספר x מקיים $-1<\frac{2}{x}-5<1$ היא כי המספר x מקיים $-1<\frac{2}{x}-5$ **וגם** $\frac{2}{x}-5<1$. לכן, ניתן לפתור כל אחד מהם בנפרד, ולמצוא את החיתוך של שתי קבוצות הפתרונות שהתקבלו.

אי-שיוויון ראשון:

$$-1<\frac{2}{x}-5 \underset{\substack{\text{multiply both sides}\\ \text{by } x^2 \text{ which is always}\\ \text{positive}}}{\Rightarrow} -x^2<2x-5x^2 \Rightarrow 4x^2-2x<0 \Rightarrow 2x^2-x<0 \Rightarrow x(2x-1)<0$$

כפלוה יכולה להיות קטנה מאפס רק אם אחד הגורמים הוא חיובי והשני הוא שלילי. לכן יש לשקול שני מקרים שונים: (כדי שאי השיוויון יתקיים עבור x נדרש שרק אחד מהם יתקיים)

מקרה ראשון:

$x<0$ וגם $2x-1>0 \Rightarrow x>\frac{1}{2}$ (אין x המקיים זאת, לכן נפסל)

או, מקרה שני:

$x>0$ וגם $2x-1<0 \Rightarrow x<\frac{1}{2}$.

וגם, אי-שיוויון שני:

$$\frac{2}{x}-5<1 \underset{\substack{\text{multiply both sides}\\ \text{by } x^2 \text{ which is always}\\ \text{positive}}}{\Rightarrow} 2x-5x^2<x^2 \Rightarrow 0<6x^2-2x \Rightarrow 0<3x^2-x \Rightarrow 0<x(3x-1)$$

כפלוה יכולה להיות גדולה מאפס רק אם שני הגורמים חיוביים או שני הגורמים שליליים. לכן יש לשקול שני מקרים שונים: (כדי שאי השיוויון יתקיים עבור x נדרש שרק אחד מהם יתקיים)

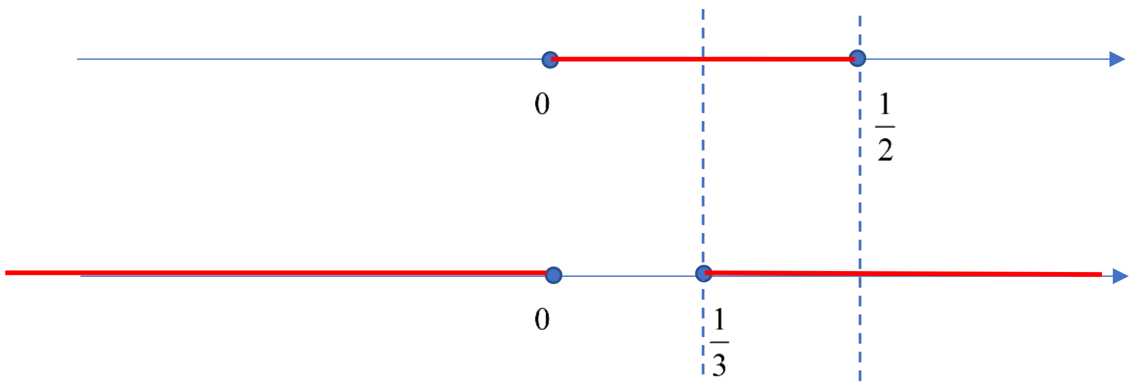
מקרה ראשון:

$x<0$ וגם $3x-1<0 \Rightarrow x<\frac{1}{3}$. ניתן פשוט לדרוש $x<0$ כדי ששתי הדרישות יתקיימו.

או, מקרה שני:

$x>0$ וגם $3x-1>0 \Rightarrow x>\frac{1}{3}$. ניתן פשוט לדרוש $x>\frac{1}{3}$ כדי ששתי הדרישות יתקיימו.

כעת, נמצא את החיתוך של שתי קבוצות הפתרונות:



ומכאן נקבל כי הקבוצה $\left\{x:\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}\right\}$ מכילה את כל הפתרונות עבור $\left|\frac{2}{x}-5\right|<1$.

דרך ב'

דרך קצרה יותר לפתרון, נובעת ישירות מהאבחנה הבאה:

עבור $a,b>0$ אם $a<x<b$ אז מתקיימים כי $\frac{1}{a}>\frac{1}{x}>\frac{1}{b}$. לכן, נוכל פתור את התרגיל באופן הבא:

$$\left|\frac{2}{x}-5\right|<1 \Rightarrow -1<\frac{2}{x}-5<1 \Rightarrow 4<\frac{2}{x}<6 \Rightarrow \frac{1}{4}>\frac{x}{2}>\frac{1}{6} \Rightarrow \frac{2}{4}>x>\frac{2}{6} \Rightarrow \frac{1}{2}>x>\frac{1}{3}.$$

תרגיל 2

מצא את קבוצת הפתרונות עבור אי-השוויון הבא: $|x-3|<|2x-1|$.

$$|x-3|<|2x-1|$$

$x-3<0 \Rightarrow x<3$

במקרה זה נקבל:

$-(x-3)<|2x-1|$

$x-3\ge 0 \Rightarrow x\ge 3$

במקרה זה נקבל:

$x-3<|2x-1|$

$2x-1<0 \Rightarrow 2x<1$

$\Rightarrow x<\frac{1}{2}$ וגם

במקרה זה נקבל:

$-(x-3)<-(2x-1)\Rightarrow$

$-x+3<-2x+1\Rightarrow$

$x<-2$ וגם

$2x-1\ge 0 \Rightarrow 2x\ge 1$

$\Rightarrow x\ge\frac{1}{2}$ וגם

במקרה זה נקבל:

$-(x-3)<2x-1\Rightarrow$

$-x+3<2x-1\Rightarrow$

$4<3x\Rightarrow$

$\frac{4}{3}<x$ וגם

$2x-1<0 \Rightarrow 2x<1$

$\Rightarrow x<\frac{1}{2}$

מקרה זה נפסל

$2x-1\ge 0 \Rightarrow 2x\ge 1$

$\Rightarrow x\ge\frac{1}{2}$ וגם

במקרה זה נקבל:

$x-3<2x-1\Rightarrow$

$-2<x$ וגם

בענף זה אנו דורשים כי:

$x<-2$ וגם $x<\frac{1}{2}$ וגם $x<3$

כלומר, אנו דורשים כי $x<-2$

או

בענף זה אנו דורשים כי:

$\frac{4}{3}<x$ וגם $x\ge\frac{1}{2}$ וגם $x<3$

כלומר, אנו דורשים כי

$\frac{4}{3}\le x<3$

או

בענף זה אנו דורשים כי:

$x\ge 3$ וגם $x\ge\frac{1}{2}$ וגם $-2<x$

כלומר, אנו דורשים כי $x\ge 3$

ובסה"כ קיבלנו כי $x<-2$ או $x\ge\frac{4}{3}$ (ע"י איחוד התחומים שמחוברים עם "או").

אי-שיוויון המשולש

עבור $a,b\in\mathbb{R}$ מתקיים כי $|a+b|\le|a|+|b|$.

הוכחה

$$|a+b|=\begin{cases} a+b\le|a|+b\le|a|+|b| & a+b\ge 0\\ -(a+b)=(-a)+(-b)\le|a|+(-b)\le|a|+|b| & a+b<0\end{cases}\Rightarrow|a+b|\le|a|+|b|$$

תרגיל 3

הוכח כי לכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $|x-4|+|x-7|\ge 3$.

דרך א'

ניתן לחלק את ההוכחה למקרים:

- **עבור** $x\ge 7$ נקבל כי $x-4\ge 0$ וגם $x-7\ge 0$ ולכן במקרה עלינו להוכיח כי $x-4+x-7\ge 3\Rightarrow 2x\ge 14$ - וזה נכון לכל $x\ge 7$.
- **עבור** $4\le x<7$ נקבל כי $x-4\ge 0$ וגם $x-7<0$ ולכן במקרה עלינו להוכיח כי $x-4-(x-7)\ge 3\Rightarrow x-4-x+7\ge 3\Rightarrow 3\ge 3$ - וזה תמיד נכון.
- **עבור** $x<4$ נקבל כי $x-4<0$ וגם $x-7<0$ ולכן במקרה עלינו להוכיח כי $-(x-4)-(x-7)\ge 3\Rightarrow -x+4-x+7\ge 3\Rightarrow 8\ge 2x$. וזה נכון לכל $x<4$.

דרך ב'

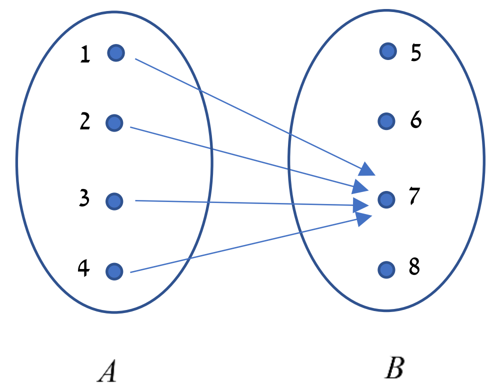
נשתמש באי-שיוויון המשולש:

$$|x-4|+|x-7|\underset{|x-7|=|7-x|}{=}|x-4|+|7-x|\ge|x-4+7-x|=|3|=3\Rightarrow|x-4|+|x-7|\ge 3$$

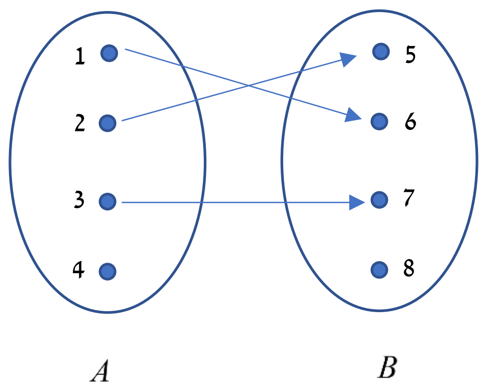
פונקציות

הגדרת פונקציה

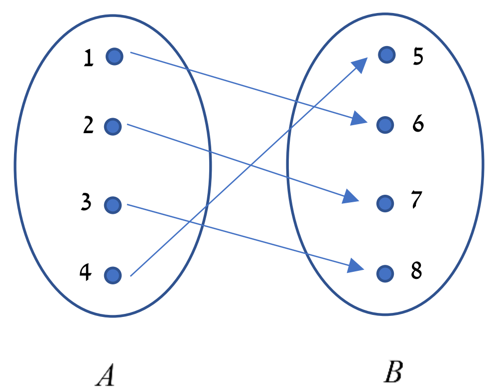
תהיינה D ו- E שתי קבוצות. פונקציה f הינה כלל המתאים לכל איבר $x \in D$ איבר יחיד $y \in E$. הקבוצה D נקראת **תחום** הפונקציה. הקבוצה E נקראת **טווח** הפונקציה. הקבוצה $f\left(D\right)=\left\{f\left(x\right):x\in A\right\}$ נקראת **תמונת** הפונקציה. מסמנים זאת ע״י $f:D\to E$.



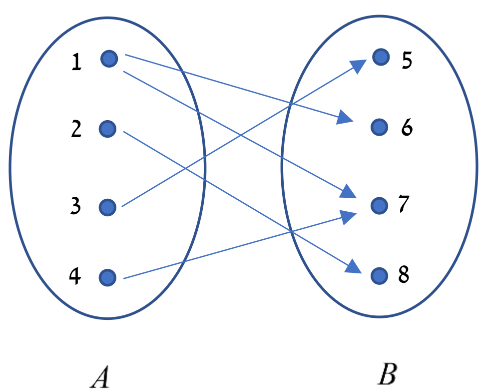
פונקציה.
מהי תמונת הפונקציה?



לא פונקציה
לאיבר 4 בתחום לא מותאם איבר בטווח.



פונקציה.
מהי תמונת הפונקציה?



לא פונקציה.
לאיבר 1 בתחום מותאם יותר מאיבר יחיד בטווח.

פונקציה חד-חד-ערכית

תהי $f:D\to E$ פונקציה. נאמר כי f **חד-חד-ערכית (חח"ע)** אם לכל $x_1,x_2\in D$ מתקיים $f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)\Rightarrow x_1=x_2$.

<u>הגדרה אנאלוגית:</u>

$$x_1\neq x_2\Rightarrow f\left(x_1\right)\neq f\left(x_2\right)$$

פונקציה על

תהי $f:D\to E$ פונקציה. נאמר כי f היא **על** אם לכל $y\in E$ קיים $x\in D$ כך ש- $f\left(x\right)=y$.

פונקציה הפיכה ופונקציה הפוכה

תהי $f:D\to E$ פונקציה. נאמר כי f פונקציה הפיכה אם קיימת פונקציה $f^{-1}:E\to D$ כך שמתקיים:

- לכל $x\in D$ מתקיים כי $f^{-1}\left(f\left(x\right)\right)=x$
- לכל $y\in D$ מתקיים כי $f\left(f^{-1}\left(y\right)\right)=y$

אם הגדרה זו מתקיימת, נאמר כי f פונקציה הפיכה, וכי f^{-1} הינה הפונקציה ההפוכה של f.

$f:D\to E$ היא פונקציה היא חח"ע ועל אמ"מ (אם ורק אם) f היא פונקציה הפיכה

כיוון ראשון – מימין לשמאל

אם כן, בכיוון זה נתון כי $f:D\to E$ חח"ע ועל. מכך אנו מסיקים כי בהינתן $y\in E$ כלשהו קיים $x\in D$ יחיד כך ש- $f\left(x\right)=y$.

"**קיים**" – משום ש- f על.

"**יחיד**" – משום ש- f חח"ע.

אם כן, ממסקנה זו ניתן להגדיר פונקציה $f^{-1}:E\to D$ המקיימת $f^{-1}\left(y\right)=x$. זהו אכן כלל העתקה המקיים את ההגדרה של פונקציה – נתון לנו $y\in E$ כלשהו (כלומר, איננו משמיטים אף איבר בתחום), ואנו מתאימים עבורו $x\in D$ יחיד בטווח.

אם כן, כעת נבחין כי:

- $f\left(f^{-1}\left(y\right)\right)\underset{\substack{f^{-1}(y)=x\\ \text{by definition}}}{=}f\left(x\right)=y$
- $f^{-1}\left(f\left(x\right)\right)=f^{-1}\left(y\right)\underset{\substack{f^{-1}(y)=x\\ \text{by definition}}}{=}x$

ומכאן כי f הפיכה לפי הגדרה.

כיוון שני – משמאל לימין

כעת נתון כי f הפיכה. כלומר, קיימת $f^{-1}:E\to D$ כך שלכל $x\in D, y\in E$ מתקיים $f\left(f^{-1}(y)\right)=y$ ו- $f^{-1}\left(f(x)\right)=x$.

- נוכיח כי f חח"ע:

  יהיו $x_1,x_2\in D$ כך ש- $f(x_1)=f(x_2)$. אז מכך ש- f הופכית, נקבל כי:

  $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow f^{-1}\left(f(x_1)\right)=f^{-1}\left(f(x_2)\right)\Rightarrow x_1=x_2$.

  כלומר קיבלנו $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$ ולכן f חח"ע לפי הגדרה.
- נוכיח כי f על:

  יהא $y\in E$. אז $f^{-1}(y)\in D$. ומכך ש- f הופכית נקבל כי $f\left(f^{-1}(y)\right)=y$. כלומר, מצאנו כי לכל $y\in E$ קיים $x\in D$ כך ש- $f(x)=y$, ולכן f על לפי הגדרה.

פונקציה מונוטונית

תהא $f:D\to E$.

- f תקרא מונוטונית עולה אם $\forall x_1,x_2\in D: x_1\le x_2\Rightarrow f(x_1)\le f(x_2)$
- f תקרא מונוטונית עולה ממש אם $\forall x_1,x_2\in D: x_1< x_2\Rightarrow f(x_1)< f(x_2)$
- f תקרא מונוטונית יורדת אם $\forall x_1,x_2\in D: x_1\le x_2\Rightarrow f(x_1)\ge f(x_2)$
- f תקרא מונוטונית יורדת ממש אם $\forall x_1,x_2\in D: x_1< x_2\Rightarrow f(x_1)> f(x_2)$

פונקציה המקיימת אחת מההגדרות הנ"ל תקרא פונקציה מונוטונית. פונקציה אשר אינה מקיימת אף אחת מההגדרות הנ"ל אינה פונקציה מונוטנית.

פונקציה זוגית ואי-זוגית

תהא $f:D\to E$.

- נאמר ש- f זוגית אם $\forall x\in D: f(x)=f(-x)$
- נאמר ש- f אי-זוגית אם $\forall x\in D: f(-x)=-f(x)$

פונקציה מחזורית

תהא $f:D\to E$.

נאמר ש- f פונקציה מחזורית אם קיים מספר $T>0$ כך שלכל $x\in D$ מתקיים $x\pm T\in D$ וגם $f(x\pm T)=x$.

המספר T המינימלי שמקיים תכונה זו נקרא המחזור של f.

פונקציה חסומה

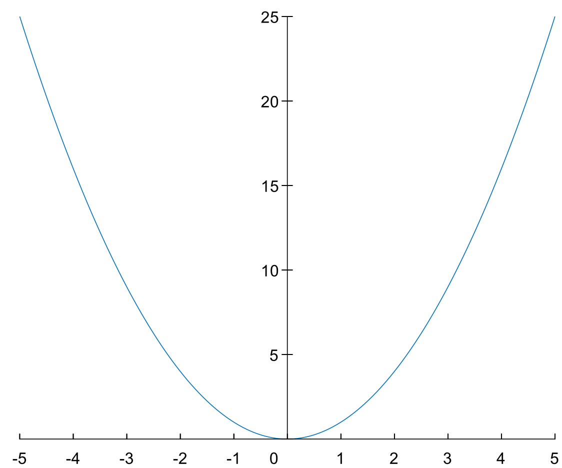
תהא $f:D\to E$.

נאמר ש- f פונקציה חסומה אם קיים $M>0$ כך ש- $\forall x\in D:\left|f\left(x\right)\right|\le M$.

תרגיל

סווג את הפונקציות הבאות:

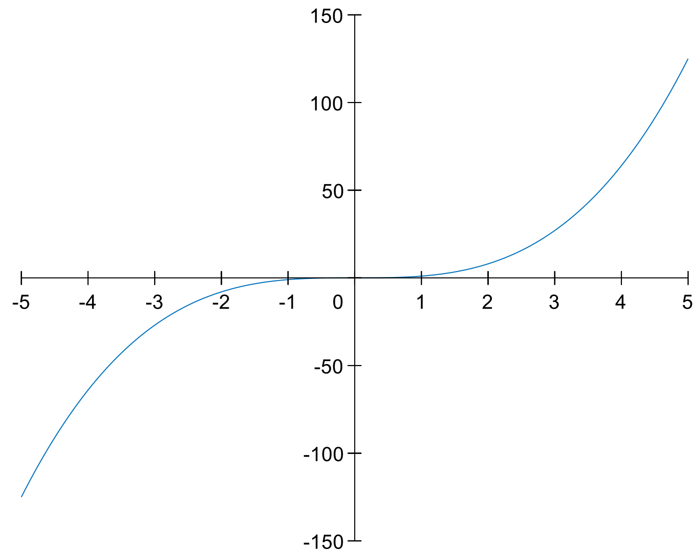
הפונקציה $f\left(x\right)=x^2$



- תחום: $\mathbb{R}$
- טווח: $\mathbb{R}^+$
- אינה חח"ע
- אינה מונוטונית
- אינה חסומה (אך כן חסומה מלמטה)
- פונקציה זוגית
- לא מחזורית

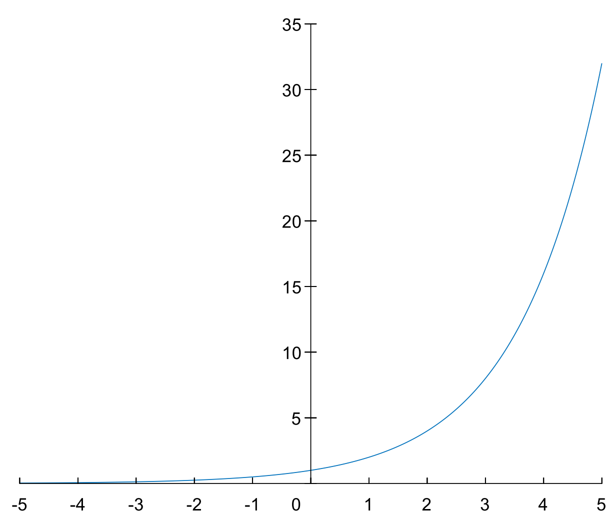
כיצד יש לצמצם את התחום של הפונקציה, כדי שהיא תהיה חח"ע? כיצד מוגדרת הפונקציה ההפוכה במקרה זה?

הפונקציה $f\left(x\right)=x^3$



- תחום: $\mathbb{R}$
- טווח: $\mathbb{R}$
- חח"ע
- מונוטונית עולה ממש
- אינה חסומה
- פונקציה אי-זוגית
- לא מחזורית

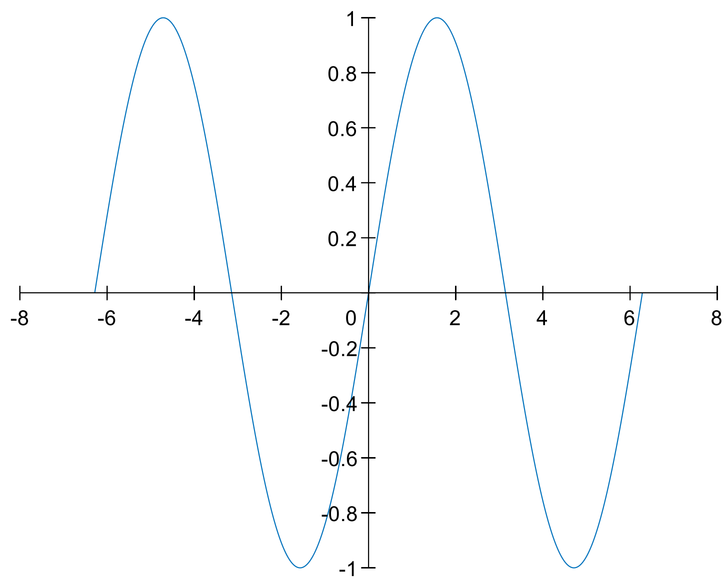
הפונקציה a^x **עבור** $a>1$



- תחום: $\mathbb{R}$

- טווח: $\mathbb{R}^{+}$
- חח״ע
- מונוטונית עולה ממש
- אינה חסומה (אך כן חסומה מלמטה)
- אינה זוגית ואינה אי-זוגית
- לא מחזורית

הפונקציה $\sin(x)$



- תחום: $\mathbb{R}$
- טווח: $[-1,1]=\{x:-1\leq x\leq x\}$
- אינה חח״ע
- לא מונוטונית
- חסומה
- אי-זוגית
- מחזורית

כיצד יש לצמצם את התחום של הפונקציה, כדי שהיא תהיה חח״ע? כיצד מוגדרת הפונקציה ההפוכה במקרה זה?