תרגול 11

כלל לופיטל (L'Hospital's Rule)

יהיו f ו- g גזירות בסביבה מנוקבת של a. אם התנאים הבאים מתקיימים:

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$
2. $g'(x)\neq 0$ בסביבה המנוקבת של a.
3. $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}=L$

אז $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}=L$.

כלומר, כלל לופיטל מאפשר לנו להשתמש בנגזרת כדי לחשב גבולות מסוג $\frac{0}{0}$ או $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, אשר חישובם קשה יותר בדרכים קונבנציונליות.

גרסאות נוספות לכלל לופיטל

הגרסה שרשומה לעיל היא רק אחת מבין רבות. ניתן להפעיל את כלל לופיטל גם תחת התנאים הבאים:

1. <u>משתנה הגבול:</u>
   משתנה הגבול יכול לשאוף גם לאינסוף או למספר סופי מכיוון מסויים:
   a. $x\to\pm\infty$
   b. $x\to a^{+}$
   c. $x\to a^{-}$
2. <u>ערך הגבול של הפונקציות:</u>
   a. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=\pm\infty$
   b. $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$ או $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$.
   c. $\lim\limits_{x\to a} g(x)=-\infty$ או $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$.
3. ערך הגבול של מנת הנגזרות של הפונקציות:
   a. $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}=\pm\infty$

כל צירוף של התנאים הרשומים לעיל הוא אפשרי.

דוגמא 1

חשבו את $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$.

פתרון

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\underset{L'Hospital\ \frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1$$

דוגמא 2

חשהו את $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{\tan x-x}$.

פתרון

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{\tan x-x}\underset{L'Hospital\ \frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\frac{1}{\cos^2 x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{\cos^2 x}}=\lim_{x\to 0}-\frac{\cos^2 x}{1+\cos x}=-\frac{1}{2}$$

דוגמא 3

חשבו את $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$.

פתרון

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}\underset{L'Hospital\ \frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\frac{1}{x}+x^2\cdot\cos\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\cos x}$$

לביטוי $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\cos x}$ אין גבול כאשר $x\to 0$ משום ש- $\lim\limits_{x\to 0}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ לא קיים.

אך אין זה אומר שהגבול המקורי שניסינו לחשב $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$ לא קיים, זה רק אומר שהניסיון להשתמש בכלל לופיטל נכשל.

נפתור את הגבול ללא שימוש בלופיטל:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot x\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)\cdot\lim_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)=1\cdot 0=0$$

דוגמא 4

חשבו את $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

פתרון

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \underset{L'Hospital\ \frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} \underset{L'Hospital\ \frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x}{1} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

אם כן, הניסיון להשתמש בלופיטל (פעמיים) החזיר אותנו לנקודת ההתחלה - נכנסו ללולאה אינסופית. לכן, גם מקרה זה, לופיטל לא עוזר בחישוב הגבול.

לכן, נחשב את הגבול ללא לופיטל:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 1$$

דוגמא 5

חשבו את $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^{-1/x^2}}{x^{100}}$.

פתרון

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-1/x^2}}{x^{100}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-x^{-2}}}{x^{100}} \underset{L'Hospital\ \frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-1/x^2}\cdot 2x^{-3}}{100x^{99}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-1/x^2}}{\frac{100x^{99}}{2x^{-3}}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-1/x^2}}{50x^{102}}$$

אם כן, לאחר הפעלת לופיטל, קיבלנו כי החזקה של x גדלה (מ- 100 ל- 102). לכן, נראה שהכיוון הזה לא מקדם אותנו.

ניסיון נוסף:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-1/x^2}}{x^{100}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x^{-100}}{e^{1/x^2}} \underset{L'Hospital\ \frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{-100x^{-101}}{e^{1/x^2}\cdot\left(-2x^{-3}\right)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{-100x^{-101}}{-2x^{-3}}}{e^{1/x^2}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{50x^{-98}}{e^{1/x^2}} =$$

$$\underset{L'Hospital\ \frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{-98\cdot 50x^{-99}}{e^{1/x^2}\cdot\left(-2x^{-3}\right)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{48\cdot 50x^{-96}}{e^{1/x^2}} = \ldots = \lim_{x\to 0^+}\frac{50!}{e^{1/x^2}} = 0$$

דוגמא 6

חשבו את $\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}$.

פתרון

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}\underset{L'Hospital\ \frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}\underset{L'Hospital\ \frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x}\underset{L'Hospital\ \frac{\infty}{\infty}}{=}\dots\underset{L'Hospital\ \frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{n!}{e^x}=0$$

דוגמה זו ממחישה את העובדה כי פונקציות מעריכית שואפת לאינסוף הרבה יותר מהר מפולינום.

דוגמא 7

חשבו את $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^n}$.

פתרון

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^n}\underset{L'Hospital\ \frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{nx^{n-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{nx^n}=0$$

דוגמה זו ממחישה את העובדה כי פולינום שואף לאינסוף הרבה יותר מהר מלוגריתם.

דוגמא 8

חשבו את $\lim_{x\to0^+}x^n\ln x$ עבור $n>0$ כלשהו.

פתרון

$$\lim_{x\to0^+}x^n\ln x=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^n}}\underset{L'Hospital\ \frac{-\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-nx^{-n-1}}=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{-nx^{-n-1}}=\lim_{x\to0^+}\frac{-nx^{n+1}}{x}=\lim_{x\to0^+}-nx^n=0.$$

דוגמא 8

חשבו את $\lim_{n\to\infty}\frac{\arctan{}^1\!/_n}{{}^1\!/_n}$.

פתרון

למעשה אנו מתבקשים להוכיח גבול של סדרה. כדי להשתמש בכלל לופיטל עלינו לעבור לחישוב גבול עבור פונקציות.

לפי הגדרת הגבול של פוונקציה, אם נראה כי $\lim_{x\to0}\frac{\arctan x}{x}=L$, כך ש- $f(x)=\frac{\arctan x}{x}$, אז נקבל כי לכל סדרה $a_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ מתקיים כי $f(a_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$. לכן, משום ש- $\frac{1}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ נוכל להסיק כי $\frac{\arctan \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=f\left(\frac{1}{n}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}L$.

אם כן, נחשב את $\lim_{x\to0}\frac{\arctan x}{x}$:

$$\lim_{x\to0}\frac{\arctan x}{x}\underset{L'Hospital\ \frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{1}=\lim_{x\to0}\frac{1}{1+x^2}=1.$$

לכן, נקבל כי $\lim_{n\to\infty}\frac{\arctan \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1$.

משפט טיילור (טור טיילור)

תהי f פונקציה גזירה $n+1$ פעמים בסביבה של הנקודה x_0, ותהי x נקודה כלשהי בסביבה הזו. אזי קיימת נקודה c בין x ל- x_0 כך ש- $f(x)=P_n(x)+R_n(x)$ כאשר:

$$P_n(x)=f(x_0)+\frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

כמו כן, מתקיים כי:

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}\xrightarrow[x\to x_0]{}0$$

טור מקלורן

מקרה פרטי של משפשט טיילור, כאשר $x_0=0$.

תרגיל

1. רשמו את פיתוח טיילור בנקודה $x_0=0$ לפונקציה $f(x)=\sqrt{x+1}$ עד $n=3$.

2. תנו הערכה ל- $\sqrt{1.1}$, ומצאו חסם על השגיאה.

פתרון

סעיף 1

אם כן, עלינו לחשב תחילה את $f^{(n)}(x)$ עד $n=4$:

$$f^{(0)}(x)=\sqrt{x+1}$$

$$f^{(1)}(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

$$f^{(2)}(x)=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{(x+1)^3}}$$

$$f^{(3)}(x)=\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{\sqrt{(x+1)^5}}$$

$$f^{(4)}(x)=-\frac{15}{16}\cdot\frac{1}{\sqrt{(x+1)^7}}$$

עבור $x_0=0$ נקבל:

$$f^{(0)}(0)=\sqrt{0+1}=1$$

$$f^{(1)}(0)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{0+1}}=\frac{1}{2}$$

$$f^{(2)}(0)=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{(0+1)^3}}=-\frac{1}{4}$$

$$f^{(3)}(0)=\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{\sqrt{(0+1)^5}}=\frac{3}{8}$$

עבור השגיאה, נקבל כי:

$$f^{(4)}(c)=-\frac{15}{16}\cdot\frac{1}{\sqrt{(c+1)^7}}$$

$$R_3(x)=\frac{f^{(3+1)}(c)}{(3+1)!}(x-0)^{3+1}=\frac{f^{(4)}(c)}{(4)!}x^4=\frac{-\frac{15}{16}\cdot\frac{1}{\sqrt{(c+1)^7}}}{(4)!}x^4=-\frac{15}{16}\cdot\frac{x^4}{4!}\cdot\frac{1}{\sqrt{(c+1)^7}}$$

ומכאן נקבל לפי משפט טיילור כי :

$$f(x)=P_n(x)+R_n(x)=f(0)+\frac{f^{(1)}(0)}{1!}x+\frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2+\frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3+R_n(x)=$$

$$=1+\frac{1/2}{1!}x+\frac{-1/4}{2!}x^2+\frac{3/8}{3!}x^3-\frac{15}{16}\cdot\frac{x^4}{4!}\cdot\frac{1}{\sqrt{(c+1)^7}}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}\underbrace{-\frac{15}{16}\cdot\frac{x^4}{4!}\cdot\frac{1}{\sqrt{(c+1)^7}}}_{\text{error}}$$

סעיף 2

אם כן, לפי פיתוח טיילור מהסעיף הקודם, נקבל כי :

$$\sqrt{1.1}=\sqrt{0.1+1}=f(0.1)\approx 1+\frac{0.1}{2}-\frac{0.1^2}{8}+\frac{0.1^3}{16}=1+\frac{1}{20}-\frac{1}{800}+\frac{1}{16000}=1.0488125$$

כעת, נמצא חסם על השגיאה. לפי משפט טיילור, אנו יודעים כי $c\in(0,0.1)$, משום שהפיתוח נעשה סביב $x_0=0$ והחישוב של הערך עצמו נעשה ב- $x=0.1$. מכאן נקבל כי :

$$0<c<0.1$$

$$1<c+1<1.1$$

$$1<(c+1)^7<1.1^7$$

$$1<\sqrt{(c+1)^7}<\sqrt{1.1^7}$$

$$1>\frac{1}{\sqrt{(c+1)^7}}>\frac{1}{\sqrt{1.1^7}}$$

כלומר, קיבלנו כי $\frac{1}{(c+1)^7}<1$, ולכן :

$$|R_3(0.1)|=\left|-\frac{15}{16}\cdot\frac{0.1^4}{4!}\cdot\frac{1}{\sqrt{(c+1)^7}}\right|=\frac{15}{16}\cdot\frac{x^4}{4!}\cdot\frac{1}{\sqrt{(c+1)^7}}<\frac{15}{16}\cdot\frac{0.1^4}{4!}=\frac{5}{128}\cdot\frac{1}{10000}=\frac{5}{1.28}\cdot\frac{1}{1000000}=\frac{5}{1.28}\cdot 10^{-6}$$

תרגיל

חשבו את הגבול $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1+\frac{x^2}{2}}{x^4}$.

פתרון

תזכורת, פיתוח טיילור של $\cos(x)$ סביב $x_0=0$ נתון ע"י:

$$\cos(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}\pm\dots$$

ניתן גם לגדוע את הסכום האינסופי באמצע, ולהוסיף את השגיאה. אם נסכום עד $n=4$, נקבל:

$$\cos(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+R_4(x)$$

נציב חזרה בגבול, ונקבל:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1+\frac{x^2}{2}}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+R_4(x)-1+\frac{x^2}{2}}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{4!}+R_4(x)}{x^4}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{4!}}{x^4}+\frac{R_4(x)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{4!}}{x^4}+\lim_{x\to 0}\frac{R_4(x)}{x^4}=\frac{1}{4!}+0=\frac{1}{24}$$

תרגיל

הוכיחו כי $e^x\geq 1+x$ לכל x.

פתרון

תזכורת, פיתוח טיילור של e^x סביב $x_0=0$ נתון ע"י:

$$e^x=\frac{x^0}{0!}+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots$$

ניתן גם לגדוע את הסכום האינסופי באמצע, ולהוסיף את השגיאה. אם נסכום עד $n=1$, נקבל:

$$e^x=1+x+R_1(x)$$

לכן, ממשפט טיילור, קיימת $c\in(0,x)$ כך שמתקיים:

$$e^x=1+x+R_1(x)=1+x+\frac{f^{(2)}(c)}{2!}x^2=1+x+\frac{e^c}{2!}x^2 .$$

כעת, נשים לב כי $\frac{e^c}{2!}x^2 \geq 0$ לכל x, ולכן:

$$e^x - (1+x) = \frac{e^c}{2!}x^2 \geq 0$$

כלומר:

$$e^x \geq 1+x$$

תרגיל

יהא m מספר טבעי.

הוכיחו כי $e^x > \frac{x^m}{m!}$ לכל $x \geq 0$.

פתרון

מפיתוח טיילור של e^x סביב $x_0 = 0$ נקבל:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} + \frac{x^m}{m!} + R_m(x)$$

ממשפט טיילור ידוע לנו כי קיימת $c \in (0,x)$ כך שהשגיאה נתונה ע"י

$R_m(x) = \frac{f^{(m+1)}(c)}{(m+1)!}(x-x_0)^{m+1} = \frac{e^c}{(m+1)!}x^{m+1}$, ולכן:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} + \frac{x^m}{m!} + \frac{e^c}{(m+1)!}x^{m+1}.$$

כעת, נשים לב כי מכך שנתון $x \geq 0$ נובע כי $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} + \frac{x^m}{m!} \geq 1 > 0$ וכי $\frac{e^c}{(m+1)!}x^{m+1} \geq 0$.

לכן, נקבל כי $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} + \frac{e^c}{(m+1)!}x^{m+1} > 0$. כלומר, קיבלנו כי:

$$e^x - \frac{x^m}{m!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} + \frac{e^c}{(m+1)!}x^{m+1} > 0$$

ומכאן כי:

$$e^x > \frac{x^m}{m!}$$

תרגיל

הוכיחו כי e אינו רציונלי באמצעות משפט טיילור.

פתרון

תחילה נמצא חסם עליון על e.

פיתוח טיילור של e^x ב- $x_0=0$ נתון ע״י $e^x = \frac{x^0}{0!}+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots$. עבור $x=1$ נקבל:

$$e=e^1=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\dots<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 2\cdot 2}+\dots=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots\le 3$$

כלומר קיבלנו כי $e<3$.

כעת, עבור n כלשהו, נקבל כי לפי משפט טיילור מתקיים:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots++\frac{x^n}{n!}+R_n(x)$$

ולכן, עבור $x=1$ נקבל:

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{n!}+R_n(1)$$

כאשר עבור $c\in(0,1)$ מתקיים:

$$R_n(1)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(1-0)^{n+1}=\frac{e^c}{(n+1)!}<\frac{e^1}{(n+1)!}<\frac{3}{(n+1)!}$$

ולכן:

$$e<1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{n!}+\frac{3}{(n+1)!}$$

כלומר:

$$0<e-\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{n!}\right)<\frac{3}{(n+1)!}$$

כעת נניח בשלילה כי קיימים $p,q\in\mathbb{Z}$, $q\neq 0$, כך ש- $e=\frac{p}{q}$, אז נקבל כי:

$$0<\frac{p}{q}-\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)<\frac{3}{(n+1)!}$$

כעת נכפיל את כל האגפים ב- $n!$ ונקבל:

$$0<\frac{p\cdot n!}{q}-\left(n!+n!+\frac{n!}{2!}+\frac{n!}{3!}+\ldots+\frac{n!}{n!}\right)<\frac{3}{n+1}$$

כעת, נבחר $n>\max\{2,q\}$. אז נקבל כי $\frac{n!}{q}$ הואר מספר שלם (משום ש- $n>q$, ולכן q מופיע בפיתוח העצרת של n). כמו כן, גם כל אחד מהמחוברים ב- $n!+n!+\frac{n!}{2!}+\frac{n!}{3!}+\ldots+\frac{n!}{n!}$ הוא מספר שלם, ולכן הסכום כולו הוא מספר שלם. מכאן כי $\frac{p\cdot n!}{q}-\left(n!+n!+\frac{n!}{2!}+\frac{n!}{3!}+\ldots+\frac{n!}{n!}\right)$ הוא מספר שלם.

אך משום שבפרט גם $n>2$ אנו מקבלים כי $\frac{3}{n+1}<1$, ולכן $0<\frac{p\cdot n!}{q}-\left(n!+n!+\frac{n!}{2!}+\frac{n!}{3!}+\ldots+\frac{n!}{n!}\right)<1$ וזו סתירה לכך ש- $\frac{p\cdot n!}{q}-\left(n!+n!+\frac{n!}{2!}+\frac{n!}{3!}+\ldots+\frac{n!}{n!}\right)$ מספר שלם.

מכאן כי הנחת השלילה שגויה.