תרגול 1

קבוצות (Sets)

הגדרה נאיבית של קבוצה

- קבוצה מוגדרת להיות אוסף של עצמים.
- בהינתן קבוצה ועצם כלשהו בעולם, או שהעצם שייך לקבוצה (כלומר, איבר בקבוצה), או שאינו שייך לקבוצה (כלומר, אינו איבר בקבוצה).
- בהינתן קבוצה, עצם כלשהו לא יכול להיות איבר בקבוצה יותר מפעם אחת.
- שתי קבוצות הן שוות אם יש להן בדיוק אותם האיברים.

הגדרה מפורשת

ניתן להגדיר קבוצה במפורש ע"י רשימת איברי הקבוצה בין שני סוגרים מסולסלים, כאשר איברי הקבוצה מופרדים ע"י פסיק.

דוגמאות:

- $A=\{1,2,3,4\}$ - קבוצה זו מכילה ארבעה איברים, המספרים 1,2,3,4.
- $A=\{dog,cat,horse\}$ - קבוצה זו מכילה שלושה איברים, כלב, חתול וסוס.
- $A=\{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n,o,p,q,r,s,t,u,v,w,x,y,z\}$ - איברי קבוצה זו מכילה את כל אותיות הא"ב האנגלי.

הגדרה ע"י כלל

ניתן להגדיר קבוצה ע"י כלל המתאר את איברי הקבוצה.

דוגמאות:

- $\{x : \text{x is a member country in the EU}\}$
- $\{x : 1\le x\le 5\}$
- $\{x : 2x+1<10\}$

שייכות

תהא A קבוצה, ויהא x עצם כלשהו.

נסמן כי x **<u>איבר בקבוצה</u>** A ע"י $x\in A$. אחרת, אם x **<u>אינו איבר</u>** ב- A, נסמן זאת ע"י $x\notin A$.

הכלה

יהיו A ו- B קבוצות.

נאמר כי הקבוצה A **<u>מוכלת</u>** בקבוצה B, אם לכל $x\in A$ מתקיים כי $x\in B$. נסמן זאת ע"י $A\subseteq B$.

נאמר כי הקבוצה A **מוכלת ממש** בקבוצה B, אם לכל $x \in A$ מתקיים כי $x \in B$ וגם קיים $y \in B$ כך ש- $y \notin A$.
נסמן זאת ע"י $A \subset B$.

שוויון

יהיו A ו- B קבוצות.

נאמר כי **הקבוצות שוות**, אם לכל $x \in A$ מתקיים כי $x \in B$ וגם לכל $x \in B$ מתקיים כי $x \in A$. באופן יותר קומפקטי, נאמר כי הקבוצות שוות אם $B \subseteq A$ וגם $A \subseteq B$. נסמן זאת ע"י $A = B$.

כיצד נגדיר אם הקבוצות אינן שוות?

הקבוצה הריקה

הקבוצה בה אין איברים כלל, נקראת **הקבוצה הריקה**, ומסומנת ע"י $\{\ \}$ או ע"י $\varnothing$.

עוצמה

תהא A קבוצה.

גודלה של הקבוצה A נקרא עוצמה. את העוצמה מודדים ע"י מספר האיברים בקבוצה. יש להבדיל בין עוצמה סופית, לעוצמה אינסופית. עוצמת הקבוצה A מסומנת ע"י $|A|$. עוצמה של קבוצה אינסופית בת-מניה מסומנת ע"י $\aleph_0$.

דוגמאות:

- $|\{1,2,3,4\}| = 4$
- $|\{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n,o,p,q,r,s,t,u,v,w,x,y,z\}| = 26$
- $|\{1,2,3,4,5,6,\ldots\}| = \aleph_0$
- $|\varnothing| = 0$

איחוד

יהיו A ו- B קבוצות.

האיחוד של איברי הקבוצות A ו- B מסומן ע"י $A \cup B$ ומוגדר כך $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$.

דוגמאות:

- $\{1,2,3,4\} \cup \{5,6\} = \{1,2,3,4,5,6\}$
- $\{1,2,3,4,5\} \cup \{5,6\} = \{1,2,3,4,5,6\}$
- $\{1,3,5,7,9,\ldots\} \cup \{2,4,6,8,10,\ldots\} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,\ldots\}$

חיתוך

יהיו A ו- B קבוצות.

החיתוך של איברי הקבוצות A ו- B מסומן ע״י $A\cap B$ ומוגדר כך $A\cap B=\{x\mid x\in A\wedge x\in B\}$.

דוגמאות:

- $\{1,2,3,4\}\cap\{5,6\}=\varnothing$
- $\{1,2,3,4,5\}\cap\{5,6\}=\{5\}$
- $\{1,3,5,7,9,\ldots\}\cap\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,\ldots\}=\{1,3,5,7,9,\ldots\}$

קבוצות מספרים (Number Sets)

קבוצת המספרים הטבעיים (Natural Numbers)

$$\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$$

קבוצת המספרים השלמים (Integer Numbers)

$$\mathbb{Z}=\{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$$

קבוצת המספרים הרציונליים (Rational Numbers)

$$\mathbb{Q}=\left\{\frac{m}{n}:m,n\in\mathbb{Z},n\neq 0\right\}$$

קבוצת המספרים הממשיים (Real Numbers)

$\mathbb{R}=\{x:-\infty<x<\infty\}$. קבוצה זו מתקבלת ע״י איחוד של קבוצת המספרים הרציונליים וקבוצת המספרים האי רציונליים.

<u>הערה:</u>

נשים לב כי $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$.

חזקות

חזקות טבעיות

יהיו $m,n\in\mathbb{N}$, ויהיו $a,b\in\mathbb{R}$. נגדיר חזקה טבעית של מספר ממשי באופן הבא:

$$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{\text{n times}}$$

מכאן נגזור את התכונות הבאות:

1. $a^n a^m=a^{n+m}$. הוכחה:

$$a^n a^m=\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{\text{n times}}\cdot\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{\text{m times}}=\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{\text{n+m times}}=a^{n+m}$$

2. $\left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m}$. הוכחה:

$$\left(a^n\right)^m=\underbrace{a^n\cdot a^n\cdot\ldots\cdot a^n}_{\text{m times}}=\underbrace{\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{\text{n times}}\cdot\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{\text{n times}}\cdot\ldots\cdot\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{\text{n times}}}_{\text{m times}}=a^{n\cdot m}$$

3. $a^n\cdot b^n=(ab)^n$. הוכחה:

$$a^n\cdot b^n=\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{\text{n times}}\cdot\underbrace{b\cdot b\cdot b\cdot\ldots\cdot b}_{\text{n times}}\underset{\substack{\text{commutative}\\ \text{property}}}{=}\underbrace{ab\cdot ab\cdot\ldots\cdot ab}_{\text{n times}}=(ab)^n$$

4. $n>m\Rightarrow\dfrac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$. הוכחה:

$$\frac{a^n}{a^m}=\frac{\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{\text{n times}}}{\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{\text{m times}}}\underset{\substack{\text{cross-out n-m}\\ \text{a's from numerator}\\ \text{and denominator}}}{=}\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{\text{n-m times}}=a^{n-m}$$

5. $a,b>0,a>b,n>0\Rightarrow a^n>b^n$. הוכחה באינדוקציה.
6. $a>1,n>m\Rightarrow a^n>a^m$.
7. $n>m,1>a>0\Rightarrow a^n<a^m$.
8. ועוד..

חזקות שלמות (הרחבה של חזקות טבעיות)

יהיו $m,n\in\mathbb{Z}$, ויהיו $a,b\in\mathbb{R}$. נגדיר חזקה שלמה של מספר ממשי באופן הבא:

$$a^n=\begin{cases}\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{\text{n times}} & n>0\\ 1 & n=0\\ \dfrac{1}{a^{-n}} & n<0\end{cases}$$

מהגדרה זו נגזרות כל התכונות 1 עד 7 לעיל. נסו להוכיח זאת בעצמכם.

דוגמאות:

- $4^0=1$
- $5^{-3}=\dfrac{1}{5^3}$

<u>דוגמה, נוכיח את תכונה 1:</u>

- כאשר $0<m,n$ אז ההוכחה זהה להוכחה עבור המקרה הטבעי.
- אם $m=0$ אז נקבל $a^na^0=a^n\cdot 1=a^n=a^{n+0}$ (ההוכחה עבור המקרה בו $n=0$ היא אנאלוגית).
- אם $m<0$ ו- $n>0$ נקבל כי

$$a^na^m=a^n\cdot\frac{1}{a^{-m}}=\frac{a^n}{a^{-m}}=\begin{cases}\dfrac{a^{n-(-m)}}{1}\underset{\substack{\text{by natural}\\ \text{exponents}\\ \text{rule \#4}}}{=}a^{n+m} & n>-m\\ \dfrac{1}{a^{-m-n}}=\dfrac{1}{a^{-(m+n)}}\underset{\substack{\text{by the integer}\\ \text{exponent definition}}}{=}a^{m+n} & n<-m\end{cases}$$

(ההוכחה עבור $m>0$ ו- $n<0$ אנאלוגית).

- אם $m<0$ ו- $n<0$ נקבל כי $a^na^m=\dfrac{1}{a^{-n}}\cdot\dfrac{1}{a^{-m}}=\dfrac{1}{a^{-n}a^{-m}}\underset{\substack{\text{using natural}\\ \text{exponents}\\ \text{rule \#4}}}{=}\dfrac{1}{a^{-(n+m)}}\underset{\substack{\text{by the integer}\\ \text{exponent definition}}}{=}a^{n+m}$.

חזקות רציונליות (הרחבה של חזקות שלמות)

גם הפעם נקבל הכללה – חזקות רציונליות הינן הכללה של חזקות שלמות.

יהי $\dfrac{n}{m}\in\mathbb{Q}$, ויהיו $a,b\in\mathbb{R}$. נגדיר חזקה רציונלית באופן הבא:

$$a^{\frac{n}{m}}=\left(\sqrt[m]{a}\right)^n$$

(יש לזכור כי $n,m\in\mathbb{Z}$ כך ש- $m\neq 0$).

מהגדרה זו נגזרות כל התכונות 1 עד 7 לעיל. נסו להוכיח זאת בעצמכם.

הערה 1:

נשים לב כי אם $\frac{n}{m}<0$ אז או ש- $m<0$ ו- $n>0$, או ש- $m>0$ ו- $n<0$. שני המקרים מייצגים בדיוק את אותו מספר, וניתן להשתמש בכל אחד מהם לפי הצורך. במקרה זה, אנו נניח כי $m>0$ ו- $n<0$.

הערה 2:

בהמשך להערה 1, נשים לב כי ההגדרה לעיל גוררת באופן ישיר את ההבחנות הבאות אם נציב $n=1$:

$$a^{\frac{1}{m}}=\sqrt[m]{a}\Rightarrow a^{\frac{n}{m}}=\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{n}$$

כעת נוכיח כי בפרט גם מתקיים $\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{n}=\left(a^{n}\right)^{\frac{1}{m}}$. נשים לב כי מספיק שנוכיח כי $\left(\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{n}\right)^{m}=a^{n}$, משום שאז נוכל להוציא שורש m משני צידי המשוואה, ולקבל את מבוקשנו. אם כן:

$$\left(\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{n}\right)^{m}\underset{\substack{\text{by integer}\\\text{exponents}\\\text{laws}}}{=}\left(\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{m}\right)^{n}\underset{\substack{\text{by rational}\\\text{exponent}\\\text{definition}}}{=}\left(\left(\sqrt[m]{a}\right)^{m}\right)^{n}\underset{\substack{\text{m-root}\\\text{definition}}}{=}a^{n}\Rightarrow\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{n}=\left(a^{n}\right)^{\frac{1}{m}}$$

דוגמה, נוכיח את תכונה 1:

יהיו $\frac{n}{m},\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}$, ויהא $a\in\mathbb{R}$. נוכיח כי $a^{\frac{n}{m}}a^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{n}{m}+\frac{p}{q}}=a^{\frac{nq+mp}{mq}}$. נשים לב כי מספיק שנוכיח כי $\left(a^{\frac{n}{m}}a^{\frac{p}{q}}\right)^{mq}=a^{nq+mp}$ משום באמצעות הוצאת שורש- mq משני צידי המשוואה, נוכל שלקבל את מבוקשנו. אם כן:

$$\left(a^{\frac{n}{m}}a^{\frac{p}{q}}\right)^{mq}=\left(a^{\frac{n}{m}}\right)^{mq}\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{mq}=\left(\left(a^{n}\right)^{\frac{1}{m}}\right)^{mq}\left(\left(a^{p}\right)^{\frac{1}{q}}\right)^{mq}=$$

$$=\left(\left(\left(a^{n}\right)^{\frac{1}{m}}\right)^{m}\right)^{q}\left(\left(\left(a^{p}\right)^{\frac{1}{q}}\right)^{q}\right)^{m}=\left(\left(\left(a^{n}\right)^{\frac{1}{m}}\right)^{m}\right)^{q}\left(\left(\left(a^{p}\right)^{\frac{1}{q}}\right)^{q}\right)^{m}=\left(a^{n}\right)^{q}\left(a^{p}\right)^{m}=a^{nq}a^{mp}=a^{nq+mp}$$

חזקות ממשיות (הרחבה של חזקות רציונליות)

זו למעשה הכללה של חוקי החזקות גם עבור מספרים אי-רציונליים. ההוכחה הינה מעט מורכבת ועושה שימוש במושג הגבול. נחזור לנושא זה בהמשך. עם זאת, **כעת מותר לעשות שימוש בכל חוקי החזקות עבור כל מספר ממשי.**

הוכחה כי מספר עשרוני הוא בעל תבנית מחזורית אמ״מ הוא מספר רציונלי

כיוון א׳ – מימין לשמאל:

יהא $\frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$ מספר רציונלי.

אז ניתן לחשב את הפיתוח העשרוני של $\frac{n}{m}$ ע״י שימוש בחילוק ארוך, כאשר n הוא המחולק, ו- m הינו המחלק.
נשים לב כי במהלך תהליך החילוק, המחלק נשאר קבוע בכל שלב, ולכן בכל שלב בתהליך החילוק, ניתן לקבל רק אחת מתוך m שאריות אפשריות ($0,1,2,\dots,m-1$).
כלומר, יעברו לכל היותר m שלבים עד שתתקבל שארית אשר כבר התקבלה בשלב כלשהו בעבר. ברגע שמתקבלת שארית שכבר התקבלה בעבר, נסגר מעגל, והתהליך חוזר על עצמו.

Recall that in long division, one gets a remainder at each step:

		0	.	2	2	7	2			
22	)	5	.	0	0	0	0	0		
		4		4						
				6	0	←				
				4	4					
				1	6	0				
				1	5	4				
						6	0	←	repeating	

6 is a remainder. The next remainder is 16. Then the next is 6. This brings us back to where we were at an earlier step: Dividing 60 by 22. We have to get the same answer we got the previous time. Hence we have repetition of "27". The answer is $0.227272\overline{727}\dots$, where "27" keeps repeating.

The question then is: Why must we always return to a remainder that we saw earlier? The answer is that the only possible remainders are $0, 1, 2, 3, \dots, 21$ (if 22 is what we're dividing by) and there are only finitely many. If we get 0, the process terminates. If we never get 0, we have only 21 possibilities, so we can go at most 21 steps without seeing one that we've seen before. As soon as we get one that we've seen before, the repetition begins.

A related question worth asking is how you know that every repeating decimal corresponds to a rational number. E.g., if you're handed $0.227272\overline{727}\dots$ with "27" repeating forever, how do you figure out that it's exactly $5/22$? There's a simple algorithm for that too.

כיוון ב׳ – משמאל לימין

יהא $x = a.d_1d_2\dots d_m\overline{d_{m+1}d_{m+2}\dots d_{m+p}} \in \mathbb{R}$ מספר ממשי, כאשר a מייצג את החלק השלם בפיתוח העשרוני, ו- $\overline{d_{m+1}d_{m+2}\dots d_{m+p}}$ מייצג תבנית החוזרת על עצמה אינסוף פעמים. אם כן, ניתן לכתוב את x גם באופן הבא:

$x = a + 0.d_1d_2\dots d_m\overline{d_{m+1}d_{m+2}\dots d_{m+p}}$, ומכאן כי:

$$10^m x = 10^m a + d_1 d_2 \dots d_m . \overline{d_{m+1} d_{m+2} \dots d_{m+p}}$$

$$10^{m+p} x = 10^{m+p} a + d_1 d_2 \dots d_m d_{m+1} d_{m+2} \dots d_{m+p} . \overline{d_{m+1} d_{m+2} \dots d_{m+p}}$$

כעת נחסר את שתי המשוואות:

$$\begin{aligned}
&10^{m+p} x - 10^m x = \\
&= \left(10^{m+p} a + d_1 d_2 \dots d_m d_{m+1} d_{m+2} \dots d_{m+p} . \overline{d_{m+1} d_{m+2} \dots d_{m+p}}\right) - \left(10^m a + d_1 d_2 \dots d_m . \overline{d_{m+1} d_{m+2} \dots d_{m+p}}\right) = \\
&= \underbrace{10^{m+p} a}_{\text{integer}} - \underbrace{10^m a}_{\text{integer}} + \underbrace{d_1 d_2 \dots d_m d_{m+1} d_{m+2} \dots d_{m+p}}_{\text{integer}} - \underbrace{d_1 d_2 \dots d_m}_{\text{integer}} \Rightarrow \\
&\Rightarrow 10^{m+p} x - 10^m x = \underbrace{10^{m+p} a}_{\text{integer}} - \underbrace{10^m a}_{\text{integer}} + \underbrace{d_1 d_2 \dots d_m d_{m+1} d_{m+2} \dots d_{m+p}}_{\text{integer}} - \underbrace{d_1 d_2 \dots d_m}_{\text{integer}} \Rightarrow \\
&\Rightarrow x = \frac{\underbrace{10^{m+p} a}_{\text{integer}} - \underbrace{10^m a}_{\text{integer}} + \underbrace{d_1 d_2 \dots d_m d_{m+1} d_{m+2} \dots d_{m+p}}_{\text{integer}} - \underbrace{d_1 d_2 \dots d_m}_{\text{integer}}}{\underbrace{10^{m+p} - 10^m}_{\text{integer} \neq 0}}
\end{aligned}$$

כלומר קיבלנו כי ניתן לבטא את x כשבר של שני מספרים שלמים (כך שהמכנה שונה מאפס), ולכן לפי הגדרה הוא מספר רציונלי.

פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

פונקציה מעריכית

מעל שדה הממשיים $\mathbb{R}$, פונקציה מעריכית מוגדרת באופן הבא, לכל $a \in \mathbb{R}, a > 0$:

$$f(x) = a^x$$

הקבוע a נקרא הבסיס, והמשתנה x נקרא המעריך.

<u>הערה:</u>

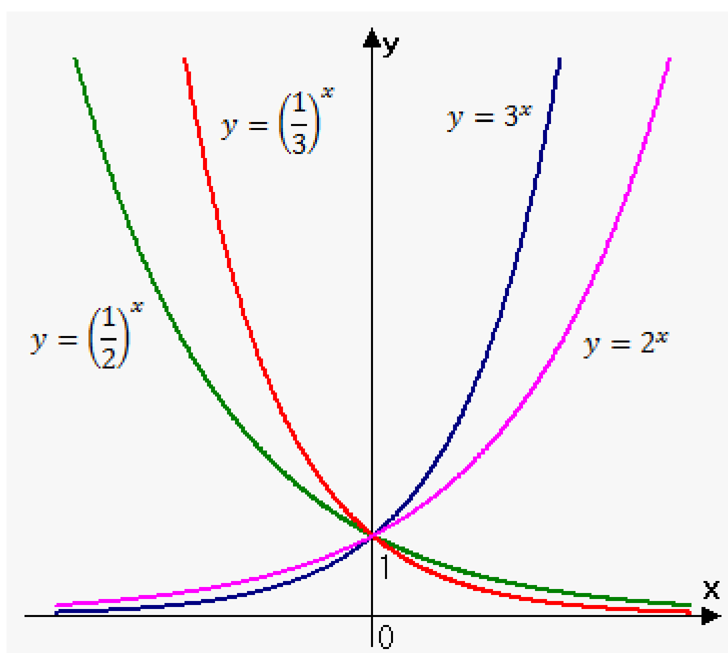
נשים לב כי מעל השדה $\mathbb{R}$, אנחנו בוחרים שלא להגדיר את הפונקציה המעריכית עבור בסיסים שליליים, כדי להימנע מביטויים כגון $\sqrt{-2} = (-2)^{\frac{1}{2}}$ להם אין משמעות בשדה $\mathbb{R}$.

תיאור הפונקציה המעריכית עבור $a > 1$

- כאשר x מקבל ערכים חיוביים הולכים וגדלים, $f(x)$ הולכת וגדלה לכיוון פלוס אינסוף.
- כאשר $x = 0$ מתקיים כי $f(x) = 0$.
- כאשר x מקבל ערכים שליליים הולכים וקטנים, $f(x)$ הולכת ומתקרבת לאפס.

תיאור הפונקציה המעריכית עבור $1 > a > 0$

- כאשר x מקבל ערכים חיוביים הולכים וגדלים, $f(x)$ הולכת ומתקרבת לאפס.
- כאשר $x = 0$ מתקיים כי $f(x) = 0$.
- כאשר x מקבל ערכים שליליים הולכים וקטנים, $f(x)$ הולכת וגדלה לכיוון פלוס אינסוף.



פונקציה לוגריתמית

הפונקציה הלוגריתמית מוגדרת באופן הבא לכל $a \in \mathbb{R}, a > 0$:

$$g(x) = \log_a x$$

בסלנג מתמטי, הפונקציה עונה על השאלה "בחזקת איזה מעריך צריך לכפול את a כדי לקבל את x".

$f(x) = a^x$ ו- $g(x) = \log_a x$ הינן פונקציות הפוכות זו לזו, כלומר:

$$f(g(x)) = a^{\log_a x} = x$$

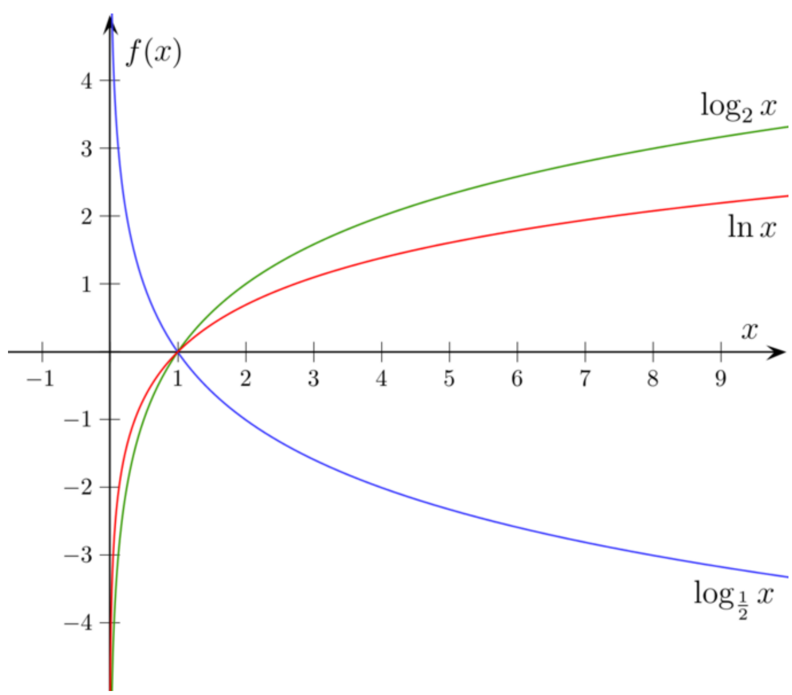
$$g(f(x)) = \log_a a^x = x$$

תיאור הפונקציה הלוגריתמית עבור $a > 1$

- כאשר x מקבל ערכים חיוביים הולכים וגדלים, $f(x)$ הולכת וגדלה לכיוון פלוס אינסוף.
- כאשר x מקבל ערכים המתקרבים לאפס, $f(x)$ הולכת ומתקרבת למינוס אינסוף.

תיאור הפונקציה הלוגריתמית עבור $1 > a > 0$

- כאשר x מקבל ערכים חיוביים הולכים וגדלים, $f(x)$ הולכת וגדלה לכיוון מינוס אינסוף.
- כאשר x מקבל ערכים המתקרבים לאפס, $f(x)$ הולכת ומתקרבת לפלוס אינסוף.



<u>דוגמאות:</u>

- $\log_{10} 10 = 1$
- $\log_{10} 100 = 2$
- $\log_{10} 1000 = 3$
- $\log_2 64 = 6$
- $\log_2 x = -3 \Rightarrow x = 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$
- $\log_{\frac{1}{2}} 32 = x \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = 32 \Rightarrow \frac{1}{2^x} = 32 \Rightarrow \frac{1}{2^x} = 2^5 \Rightarrow \frac{1}{2^x} = \frac{1}{2^{-5}} \Rightarrow x = -5$

זהויות לוגריתמיות

$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ - הוכחה:

נסמן $m = \log_a x \Rightarrow a^m = x$ ו- $n = \log_a y \Rightarrow y = a^n$. מכאן נקבל:

$$\log_a xy = \log_a \left(a^m a^n\right) = \log_a \left(a^{m+n}\right) = m + n = \log_a x + \log_a y$$

$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ - הוכחה:

נסמן $m = \log_a x \Rightarrow a^m = x$ ו- $n = \log_a y \Rightarrow y = a^n$. מכאן נקבל:

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a \left(\frac{a^m}{a^n}\right) = \log_a \left(a^{m-n}\right) = m - n = \log_a x - \log_a y$$

$\log_a \left(x^b\right) = b \cdot \log_a x$ - הוכחה:

נסמן $m = \log_a x \Rightarrow a^m = x$. מכאן נקבל:

$$\log_a \left(x^b\right) = \log_a \left(\left(a^m\right)^b\right) = \log_a \left(a^m \cdot \left(a^m\right)^{b-1}\right) = \log_a \left(a^m\right) + \log_a \left(\left(a^m\right)^{b-1}\right) = \ldots =$$
$$= \underbrace{\log_a \left(a^m\right) + \log_a \left(a^m\right) + \ldots + \log_a \left(a^m\right)}_{\text{b times}} = b \log_a \left(a^m\right) = b \log_a x$$

הוכחה - $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$:

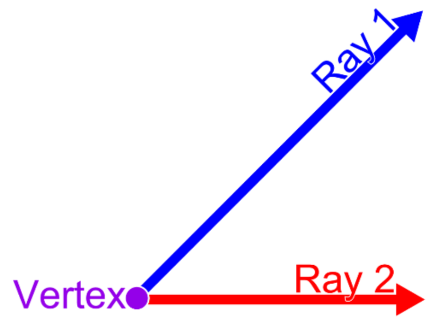
נסמן $m = \log_a x \Rightarrow a^m = x$. מכאן נקבל :

$$\log_a x = m \Leftrightarrow \log_b(a)\cdot\log_a(x) = \log_b(a)\cdot m = \log_b\left(a^m\right) = \log_b(x) \Leftrightarrow \log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$$

טריגונומטריה

הגדרת זווית

זווית מוגדרת ע"י שתי קרנות החולקות נקודה משותפת:

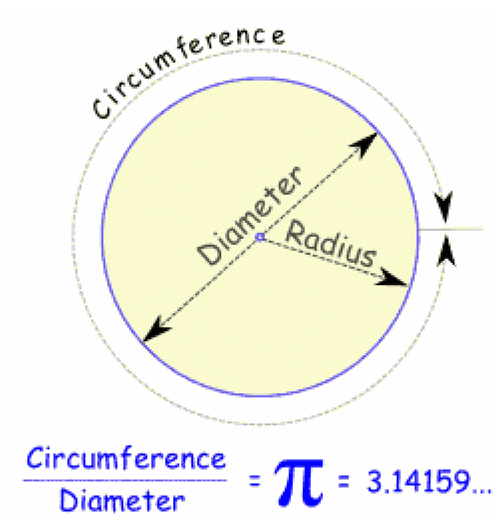


הגדרת פאי / pi / π והיקף מעגל

המספר האי-רציונלי π הינו קבוע מתמטי המוגדר להיות היחס בין היקף המעגל לקוטרו:

$$\pi = \frac{circumference}{diameter} = \frac{C}{2r} = 3.1415...$$

מכאן נובע כי היקף המעגל נתון ע"י $C = 2\pi r$.



קשת במעגל

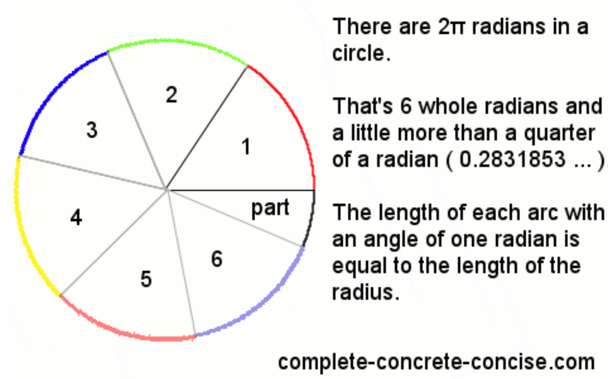
קשת במעגל הינה חלק מהיקף המעגל, הנוצר בין כל שתי נקודות על ההיקף.

הגדרת מעלה (Degree)

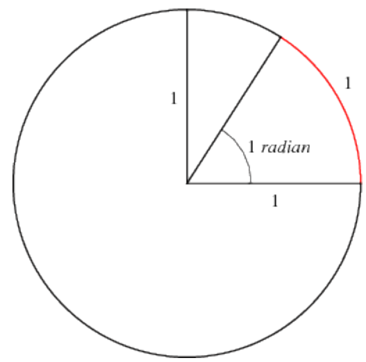
מעלה מוגדרת כזווית הנוצרת על ידי קשת שאורכה שווה לחלוקת היקף המעגל ב- 360.

הגדרת רדיאן (Radian)

הרדיאן מוגדר כזווית הנוצרת על ידי קשת שאורכה שווה לאורך של רדיוס המעגל. משום שהיקף מעגל ברדיוס r הינו $2\pi r$, נקבל כי במעגל ישנם 2π ראדיאנים.



בפרט, אם מתקיים כי $r=1$ אז נקבל את הדיאגרמה הבאה:



חלוקה זו נחשבת לחלוקה יותר "טבעית".

המרה בין מעלות לראדיאנים ובין ראדיאנים למעלות

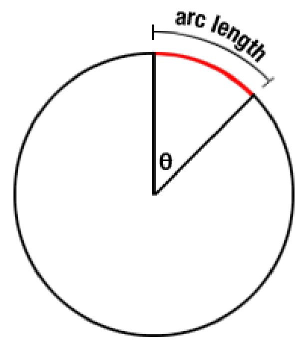
$$rad=\frac{\deg}{360}\cdot 2\pi$$

$$\deg=\frac{rad}{2\pi}\cdot 360$$

אורך קשת

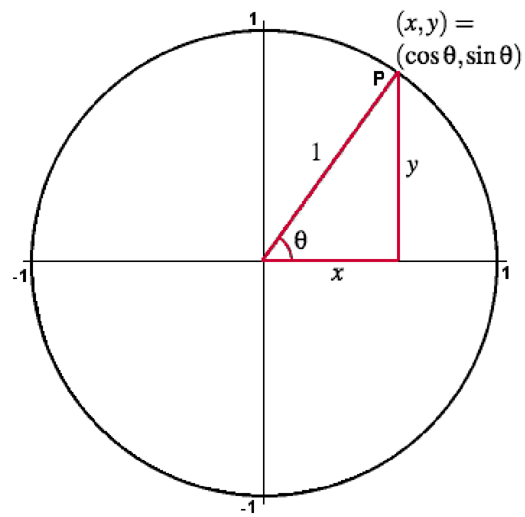
תהא θ זווית במעגל עם רדיוס r. אז היחס בין אורך הקשת x שמול הזווית θ לבין היקף המעגל, שווה ליחס שבין הזווית θ ל- 2π:

$$\frac{x}{2\pi r}=\frac{\theta}{2\pi}\Rightarrow\frac{x}{r}=\theta\Rightarrow x=\theta r$$



הגדרה של סינוס וקוסינוס

הפוקנציות $\sin(\theta)$ ו- $\cos(\theta)$ מוגדרות באופן הבא, באמצעות מעגל היחידה :



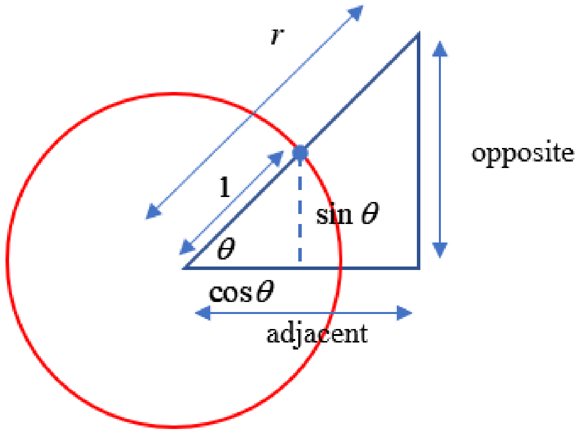
תהא $p=(x,y)$ נקודת החיתוך של מעגל היחידה עם הקרן שיוצרת הזווית θ במעגל. אז נגדיר :

$$\cos(\theta)=x$$

$$\sin(\theta)=y$$

קוסינוס וסינוס במשולש ישר זווית

באמצעות דימיון משולשים ניתן להראות כי:



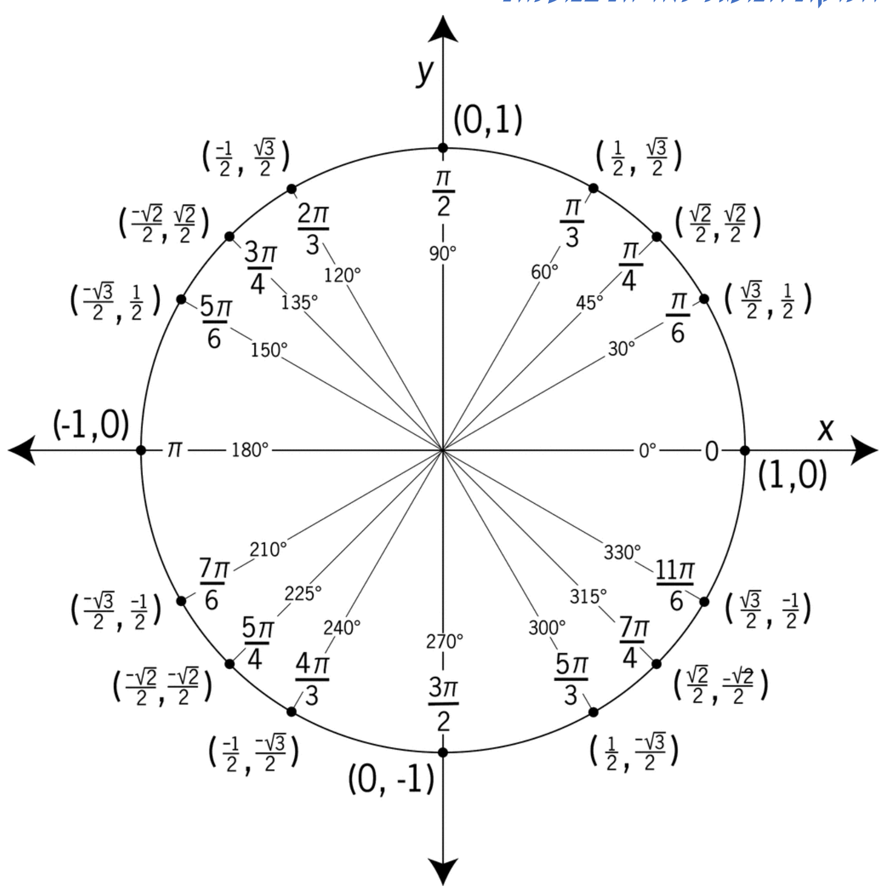
$$\frac{\text{opposite}}{r}=\frac{\sin\theta}{1}\Rightarrow\sin\theta=\frac{\text{opposite}}{r}$$

$$\frac{\text{adjacent}}{r}=\frac{\cos\theta}{1}\Rightarrow\cos\theta=\frac{\text{adjacent}}{r}$$

$$\frac{\text{opposite}}{\text{adjacent}}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta$$

$$\frac{\text{adjacent}}{\text{opposite}}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\cot\theta$$

חלוקת המעגל לזוויות במעלות



הבינום של ניוטון

הבינום של ניוטון היא נוסחה לפיתוח חזקות של סכום של שני איברים.

$$\left(x+y\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$$

כאשר $\binom{n}{k}=\frac{n!}{\left(n-k\right)!\cdot k!}$. ביטוי זה מייצג את מספר האפשרויות לבחור k עצמים מתוך n עצמים שונים, ללא חשיבות לסדר הבחירה.

ניתן להסביר את הנוסחה באופן הבא:

$$\left(x+y\right)^n=\underbrace{\overset{1}{\left(x+y\right)}\overset{2}{\left(x+y\right)}\cdot\ldots\cdot\overset{n}{\left(x+y\right)}}_{\text{n times}}$$

כדי לקבל מחובר יחיד לאחר פתיחת הסוגרים (ללא כינוס איברים), עלינו לבחור בכל אחד מ- n הגורמים את x או y, ולהכפיל את כולם.

לאחר פתיחת הסוגריים במלואם, מחובר מהצורה $x^{n-k}y^k$ יתקבלו ע"י בחירת y ב- k גורמים כלשהם (דבר זה גורר מיידית כי אנו נבחר x ב- $n-k$ הגורמים שנותרים).

עבור k מסויים, ישנן $\binom{n}{k}$ דרכים לבחור k גורמים אשר מהם נבחר את y, ועלינו לעשות זאת לכל k מ- 0 עד n.

ניתן לחשוב על זה באופן הבא – נמספר כל גורם $\left(x+y\right)$ במספר גדלים מ- 1 עד n. כעת עלינו לבחור מתוך n הגורמים, k גורמים אשר מהם אנו ניקח את x, כך שמשאר $n-k$ הגורמים הנותרים אנו ניקח את y. כלומר, קיבלנו $\binom{n}{k}$ מחוברים מהצורה x^ky^{n-k}.

<u>דוגמאות:</u>

$$\left(x+y\right)^2=\sum_{k=0}^{2}\binom{2}{k}x^{2-k}y^k=\binom{2}{0}x^{2-0}y^0+\binom{2}{1}x^{2-1}y^1+\binom{2}{2}x^{2-2}y^2=$$
$$=1\cdot x^{2-0}y^0+2\cdot x^{2-1}y^1+1\cdot x^{2-2}y^2=x^2+2xy+y^2$$

$$\left(x+y\right)^3=\sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k}x^{3-k}y^k=\binom{3}{0}x^{3-0}y^0+\binom{3}{1}x^{3-1}y^1+\binom{3}{2}x^{3-2}y^2++\binom{3}{3}x^{3-3}y^3=$$
$$=1\cdot x^{3-0}y^0+3\cdot x^{3-1}y^1+3\cdot x^{3-2}y^2++1\cdot x^{3-3}y^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$$

פיתוח עבור $(x-y)^n$:

$$(x-y)^n=\left(x+(-y)\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}(-y)^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}\cdot(-1)^k y^k$$